UNIVERSITY OF HAWAII PERIODICAL

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

GEGRÜNDET 1890 DURCH G. v. ESCHERICH UND E. WEYR
MIT DEM TITEL "MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK"

FORTGEFÜHRT DURCH
L. GEGENBAUER · F. MERTENS · W. WIRTINGER
H. HAHN · PH. FURTWÄNGLER · J. RADON

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN VON
E. HLAWKA · N. HOFREITER · K. MAYRHOFER
WIEN WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

63. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT
MIT 12 TEXTABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM SEPTEMBER 1959

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1959

Moh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX. Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

63. Band/4. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Izbicki, H. Über eine Klasse zusammengesetzter Zahlen 309

Barthel, W. Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff 317

Householder, A. S. Minimal Matrix Norms 344

Florian, A. Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln. . . 351

Utz, W. R. Boundedness of Solutions of a Linear Equation 356

Gaede, K.-W. Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten 359

Helmberg, G. Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen (II) 368

Hornich, H. Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen 378

Carlitz, L. Kummer's Congruences (mod 2^r) 394

Buchbesprechungen 401

Über eine Klasse zusammengesetzter Zahlen

Von

Herbert Izbicki, Wien

(Eingegangen am 28. Oktober 1958)

Einleitung: Alle in dieser Arbeit vorkommenden Zahlen sind, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, ganze Zahlen. Es sei $\beta \geqq 2$, $n \geqq 2$, $p \geqq 1$; dann ist das Hauptresultat, daß

$$\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$$

nur dann eine Primzahl sein kann, wenn n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar ist. Für alle anderen Fälle wird eine Faktorenzerlegung explizit angegeben. Außerdem enthält die Abhandlung einen Satz über Diophantische Gleichungen (Satz 2).

Definition 1: Die ganzen Zahlen β, n, p seien > 1, $(n, p) = 1$, $i \geqq 0$. Dann sei $a_i = 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod} p)$; und $a_i = 0$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Weiters sei $c_i = 0$, falls es nicht-negative Zahlen x, y gibt, so daß $i = px + ny$; und $c_i = \beta - 1$, falls solche Zahlen nicht existieren.

Satz 1:

$$\sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \beta^j\Big)\Big(1 + \sum_{j=1}^{(p-1)(n-1)} \beta^j c_j\Big).$$

Definition 2: Es sei b_i der Koeffizient von x^i in dem Polynom

$$\Big(\sum_{j=0}^{n-1} x^j\Big)\Big(1 + \sum_{j=0}^{(p-1)(n-1)} x^j c_j\Big).$$

Lemma 1:

(i) $b_i = 1 + \sum_{j=0}^{i} c_j$, falls $0 \leqq i \leqq n-1$;

(ii) $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{i} c_j$, falls $n \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, $p \geqq 3$;

(iii) $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{(p-1)(n-1)} c_j$, falls $(p-1)(n-1) < i \leqq p(n-1)$;

(iv) $b_i = 0$, falls $i > p(n-1)$.

Der Beweis folgt direkt aus der Definition 2.

Lemma 2: Wenn $1 \leqq i \leqq n-1$, dann

(i) $b_i = b_{i-1} + \beta - 1$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$;

(ii) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Beweis: Laut Lemma 1 (i) $b_{i-1} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1} c_j$, $b_i = 1 + \sum_{j=0}^{i} c_j$, also $b_i = b_{i-1} + c_i$. Nach Definition 1 ist $c_i = 0$ d.u.n.d., wenn nicht-negative Zahlen x, y existieren, so daß $i = px + ny$; ansonsten $c_i = \beta - 1$. Angenommen, solche Zahlen existieren: $i = px + ny$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $p > 1$, $n > 1$, $1 \leqq i \leqq n-1$. Dann ist $y = 0$, da sonst $i \geqq n$ wäre. Also $i = px$, $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Das heißt: Wenn $c_i = 0$, dann $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Nehmen wir nun an, $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$; d. h. $i = px + n \,.\, 0$, $c_i = 0$. Also ist $c_i = 0$ d.u.n.d., wenn $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, ansonsten $c_i = \beta - 1$. Dies, zusammen mit $b_i = b_{i-1} + c_i$ beweist das Lemma.

Lemma 3: $b_n = b_{n-1} - 1$.

Beweis: Zwei Fälle. (i) $p > 2$. Laut Lemma 1 (i) und (ii) $b_{n-1} = 1 + c_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j + c_n$. $0 = p \,.\, 0 + n \,.\, 0$, $n = p \,.\, 0 + n \,.\, 1$, daher $c_0 = c_n = 0$, $b_n = b_{n-1} - 1$. (ii) $p = 2$. Laut Lemma 1 (i) und (iii) $b_{n-1} = 1 + c_0 + \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j$, $b_n + 1 + c_0 = b_{n-1}$, $c_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} - 1$.

Lemma 4: Wenn $n + 1 \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, dann $p \geqq 3$, und $n = 2$ nur wenn $p > 3$, und (i) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, (ii) $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Beweis:

Angenommen $p = 2$; $n + 1 \leqq i \leqq (2-1)(n-1)$, $n + 1 \leqq n - 1$, Wid. Angenommen $n = 2$, $p = 3$; $2 + 1 \leqq i \leqq (3-1)(2-1)$, $3 \leqq 2$, Wid. Also $p \geqq 3$, $n \leqq i \leqq (p-1)(n-1)$, $n \leqq i - 1 \leqq (p-1)(n-1)$, und laut Lemma 1 (ii)

$$b_i = \sum_{j=i-n+1}^{i-1} c_j + c_i, \quad b_{i-1} = c_{i-n} + \sum_{j=i-n+1}^{i-1} c_j, \quad \text{also} \quad b_i = b_{i-1} + c_i - c_{i-n}.$$

(i) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Nehmen wir *erstens* an, es gebe nicht-negative Zahlen x_1, y_1, so daß $i = px_1 + ny_1 \,.\, i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, also $y_1 > 0$, $i - n = px_1 + n(y_1 - 1)$ mit $y_1 - 1 \geqq 0$. Nehmen wir *zweitens* an, es gebe nicht-negative Zahlen x_2 y_2, so daß $i - n = px_2 + ny_2$. Dann $i = px_2 + n(y_2 + 1)$. *Zusammengenommen*: Wenn sich eine der Zahlen i

und $i - n$ in der Form $px + ny$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, schreiben läßt, dann auch die andere. Also ist $c_i = c_{i-n}$ und $b_i = b_{i-1}$.

(ii) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Trivialerweise $i = px_1 + n \,.\, 0$, also $c_i = 0$. *Angenommen*, es gäbe nicht-negative Zahlen x_2, y_2, so daß $i - n = px_2 + ny_2$. Dann $i = px_2 + n(y_2 + 1)$. $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $n(y_2 + 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$; $(n, p) = 1$, daher $y_2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. $y_2 \geqq 0$, $y_2 + 1 > 0$, also $y_2 + 1 \geqq p$, daher $i = px_2 + n(y_2 + 1) \geqq px_2 + np \geqq np$, was $i \leqq (p - 1)(n - 1)$ widerspricht. Infolge dessen können solche Zahlen x_2, y_2 nicht existieren und $c_{i-n} = \beta - 1$, $b_i = b_{i-1} + c_i - c_{i-n} = b_{i-1} + 0 - (\beta - 1) = b_{i-1} - \beta + 1$.

Lemma 5: Wenn $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann gibt es nicht-negative Zahlen x, y, so daß $(p - 2)(n - 1) = px + ny$.

Beweis: $(p, n) = 1$, daher gibt es Zahlen x_0, y_0 derart, daß $(p - 2)(n - 1) = px_0 + ny_0$. Die allgemeine Lösung lautet $(p - 2)(n - 1) = p(x_0 + kn) + n(y_0 - kp)$. Wir können x immer negativ machen; dann ist y positiv. Wenn es keine nicht-negative Lösung gäbe, dann müßte ein k existieren, derart daß $x_0 + kn < 0$, $y_0 - (k + 1)p < 0$. Dann wäre $x_0 + kn \leqq -1$, $y_0 - kp \leqq p - 1$, $(p - 2)(n - 1) = p(x_0 + kn) + n(y_0 - kp) \leqq -p + n(p - 1)$ und $2 \leqq n$. Andererseits ist $n > 1$, also wäre $n = 2$, was zu $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$ im Wid. steht. Folglich muß $(p - 2)(n - 1) = px + ny$ eine nicht-negative Lösung haben.

Folgerung: Wenn $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann $c_{(p-2)(n-1)} = 0$.

Lemma 6: Wenn $p > 2$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann gibt es keine nicht-negativen Zahlen x, y mit $(p - 2)(n - 1) = px + ny$.

Beweis: *Angenommen*, es existierten Zahlen x, y derart, daß $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $(p - 2)(n - 1) = px + ny$. $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, $n - 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, $(p - 2)(n - 1) \equiv -2 \pmod{p}$. $p > 2$, $(p - 2)(n - 1) \not\equiv 0 \pmod{p}$, $(p - 2)(n - 1) = px + ny$, $y \neq 0$, $y \geqq 1$. Weiters $n \equiv \pmod{p}$, $n = pm + 2$, $m \geqq 0$. $(p - 2)(n - 1) = px + ny$, $(p - 2)(pm + 1) = px + (pm + 2)y$, $p^2 m - 2pm + p - 2 = px + (pm + 2)y \leqq pm + 2$, weil $y \geqq 1$, $x \geqq 0$; $p(pm - 2m + 1) \leqq pm + 4$, $p > 2$, $\frac{4}{p} < 2$, $pm - 2m + 1 \leqq m + \frac{4}{p} < m + 2$, $pm - 2m \leqq m$, $p \leqq 3$. Wegen $p > 2$ ist $p = 3$; aus $(p - 2)(n-1) = px + ny$ wird $n - 1 = px + ny \geqq n$ (wegen $x \geqq 0$, $y \geqq 1$). Dieses Widerspruches wegen können solche Zahlen x, y *nicht* existieren.

Folgerung: Wenn $p > 2$, $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$, dann $c_{(p-2)(n-1)} = \beta - 1$.

Lemma 7: (i) Wenn $p = 2$, dann $b_{(p-1)(n-1)+1} = b_{(p-1)(n-1)} - 1$.
(ii) Wenn $p > 2$ und $n \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$, dann $b_{(p-1)(n-1)+1} = b_{(p-1)(n-1)}$.
(iii) Wenn $p > 2$ und $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$, dann $b_{(p-1)(n-1)+1} = b_{(p-1)(n-1)} - \beta + 1$.

Beweis:
(i) $p = 2$, $b_{(p-1)(n-1)} = \underset{n-1}{b}_{n-1}$, $b_{(n-1)(n-1)+1} = \underset{n-1}{b}_{n}$. Laut Lemma 1 (i) und (iii) $b_{n-1} = 1 + \sum_{j=0} c_j$, $b_n = \sum_{j=1} c_j = b_{n-1} - 1 + c_0$.
$0 = p \cdot 0 + y \cdot 0$, also $c_0 = 0$ und $b_n = b_{n-1} - 1$.

(ii, iii) Laut Lemma 1 (ii) haben wir $b_{(p-1)(n-1)} = \sum_{j=(p-2)(n-1)}^{(p-1)(n-1)} c_j$,
$b_{(p-1)(n-1)+1} = \sum_{j=(p-2)(n-1)+1}^{(p-1)(n-1)} c_j = b_{(p-1)(n-1)} - c_{(p-2)(n-1)}$.

Aus den Folgerungen zu Lemma 5 und 6 erhalten wir
im Falle (ii) $c_{(p-2)(n-1)} = 0$, $b_{(p-1)(n-1)+1} = b_{(p-1)(n-1)}$,
im Falle (iii) $c_{(p-2)(n-1)} = \beta - 1$, $b_{(p-1)(n-1)+1} = b_{(p-1)(n-1)} - \beta + 1$.

Bemerkung: $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ p)$ ist mit $(p-1)(n-1) + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ äquivalent.

Der Beweis ist trivial.

Bemerkung: Für $n = 2$ ist $(p-1)(n-1) + 1 = p(n-1)$.

Lemma 8: Wenn $n \geqq 3$ und $(p-1)(n-1) + 2 \leqq i \leqq p(n-1)$, dann
(i) $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$, falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$,
(ii) $b_i = b_{i-1}$, falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$.

Beweis:
Nach Lemma 1 (iii) ist $b_i = \sum_{j=i-n+1}^{(p-1)(n-1)} c_j$, $b_{i-1} = \sum_{j=i-n}^{(p-1)(n-1)} c_j$, also $b_i = b_{i-1} - c_{i-n}$.

(i) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Angenommen, es gäbe nicht-negative Zahlen x, y, so daß $i - n = px + ny$; dann $i = px + n(y+1)$. Wegen $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ folgt $n(y+1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. $(n, p) = 1$, also $y + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $y + 1 \geqq p$, $i = px + n(y+1) \geqq np$, was $i \leqq p(n-1)$ widerspricht. Solche Zahlen x, y existieren also nicht, $c_{i-n} = \beta - 1$, $b_i = b_{i-1} - \beta + 1$.

(ii) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$. Angenommen, es gäbe *keine* nicht-negativen Zahlen x, y, so daß $i = px + ny$. Wegen $(p, n) = 1$ muß es Zahlen x_0, y_0 mit $i = px_0 + ny_0$ geben; die allgemeine Lösung ist $i = p(x_0 + nk) + n(y_0 - kp)$. Wir können ein $x < 0$ wählen, dann ist $y > 0$. Nach Annahme müßte es eine Zahl k_0 geben, derart daß $x_0 + nk_0 < 0$, $y_0 - p(k_0 + 1) < 0$. Dann wäre $x_0 \leqq -1 - nk_0$, $y_0 \leqq -1 + p + pk_0$,

$(p-1)(n-1)+2 \leqq i = px_0 + ny_0 \leqq p(-1-nk_0) + n(-1+p+pk_0) =$
$= (p-1)(n-1) - 1$. Wegen dieses Widerspruches *gibt* es nicht-negative Zahlen x, y so, daß $i = px + ny$. $y \not\equiv 0$, da sonst $i = px$ $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ widerspräche. Daher $i - n = px + n(y-1)$, $x \geqq 0$, $y - 1 \geqq 0$ und $c_{i-n} = 0$, $b_i = b_{i-1}$.

Lemma 9: Es bedeute $[z]$ die nächstkleinere ganze Zahl an die *rationale* Zahl z.

(i) Wenn $0 \leqq i \leqq n-1$, dann $b_i = 1 + (i - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$,

(ii) wenn $n \leqq i \leqq p(n-1)$, dann $b_i = (n - 1 - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$.

Beweis: Teil (i) folgt unmittelbar aus Lemma 2. Für $i = n-1$ ergibt Lemma 3 $b_n = (n - 1 - [\frac{n-1}{p}])(\beta - 1)$, oder wegen $(p, n) = 1$ $b_n = (n - 1 - [\frac{n}{p}])(\beta - 1)$. Weiters folgt aus Lemma 4, 7 und 8, daß für $n + 1 \leqq i \leqq p(n-1)$ $b_i = b_{i-1}$ falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, und $b_i = b_{i-1} -$ $-(\beta - 1)$ falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$; also $b_i = (n - 1 - [\frac{i}{p}])(\beta - 1)$.

Folgerung: $b_{p(n-1)-1} = (n - 1 - [\frac{p(n-1)-1}{p}])(\beta - 1 = \beta - 1$

$$b_{p(n-1)} = (n - 1 - [\frac{p(n-1)}{p}])(\beta - 1) = 0.$$

Definition 3: $s_i = \sum_{j=0}^{i} b_j \beta^j$.

Lemma 10: (i) Wenn $0 \leqq i \leqq n-1$, dann $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$,

(ii) wenn $n \leqq i \leqq p(n-1)$, dann $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$.

Beweis: Die Behauptung des Teiles (i) ist für $i = 0$, $s_0 = 1$ richtig.

Induktions-Voraussetzung: $s_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (i - 1 - [\frac{i-1}{p}])\beta^i$,

Induktions-Behauptung: $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i - [\frac{i}{p}])\beta^{i+1}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ und $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$.

(a) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $a_i = 0$, $[\frac{i-1}{p}] = [\frac{i}{p}]$,

$$s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (i-1-[\tfrac{i-1}{p}])\,\beta^i + \{1+(i-[\tfrac{i}{p}])\,(\beta-1)\}\beta^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{i-1-[\tfrac{i-1}{p}]+1+(i-[\tfrac{i}{p}])\,(\beta-1)\}\beta^i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i-[\tfrac{i}{p}])\,\beta^{i+1}.$$

(b) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, also $a_i = 1$, $[\frac{i}{p}] - [\frac{i-1}{p}] = 1$,

$$s_i = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{i-1-[\tfrac{i-1}{p}]+1+(i-[\tfrac{i}{p}])\,(\beta-1)\}\beta^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + \{1+(i-[\tfrac{i}{p}])\,\beta\}\beta^i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (i-[\tfrac{i}{p}])\,\beta^{i+1}.$$

Somit ist Teil (i) bewiesen. Insbesondere $s_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n-1-$ $-[\frac{n-1}{p}])\,\beta^n$. Nun ist $s_n = s_{n-1} + b_n \beta^n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n-1-[\frac{n-1}{p}])\,\beta^n +$ $+(n-1-[\frac{n-1}{p}])\,(\beta-1)\,\beta^n = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j a_j + (n-1-[\frac{n-1}{p}])\,\beta^{n+1}$. Wegen $(p, n) = 1$, $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_n = 0$, $[\frac{n-1}{p}] = [\frac{n}{p}]$, also $s_n = \sum_{j=0}^{n} \beta^j a_j +$ $+(n-1-[\frac{n}{p}])\,\beta^{n+1}$. Dies ist Teil (ii) für den niedrigsten Index.

Induktions-Voraussetzung: $s_{i-1} = \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (n-1-[\frac{i-1}{p}])\,\beta^i$,

Induktions-Behauptung: $s_i = \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n-1-[\frac{i}{p}])\,\beta^{i+1}$

(a) $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_i = 0$, $[\frac{i-1}{p}] = [\frac{i}{p}]$, $s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i =$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a_j + (n-1-[\tfrac{i-1}{p}])\,\beta^i + (n-1-[\tfrac{i}{p}])\,(\beta-1)\,\beta^i =$$

$$= \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n-1-[\tfrac{i}{p}]\,\beta^{i+1}.$$

(b) $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $a_i = 1$, $[\frac{i}{p}] - [\frac{i-1}{p}] = 1$, $s_i = s_{i-1} + b_i \beta^i =$

$= \sum_{j=0}^{i-1} \beta^j a + (n - 1 - [\frac{i-1}{p}]) \beta^i + (n - 1 - [\frac{i}{p}]) (\beta - 1) \beta^i =$

$= \sum_{j=0}^{i} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{i}{p}]) \beta^{i+1}$. Hiermit ist Lemma 10 bewiesen.

Folgerung: $s_{p(n-1)} = \sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j + (n - 1 - [\frac{p(n-1)}{p}]) \beta^{p(n-1)+1} =$

$= \sum_{j=0}^{p(n-1)} \beta^j a_j$. *Dies ist aber gleichbedeutend mit Satz 1.*

Satz 2: *Es seien a und b zwei ganze Zahlen > 1, $(a, b) = 1$, und es seien k_1 und k_2 zwei nicht-negative ganze Zahlen, $k_1 + k_2 = (a-1)(b-1) - 1$; dann hat genau eine der beiden Diophantischen Gleichungen $k_i = ax + by$ $(i = 1, 2)$ eine nicht-negative Lösung.*

Beweis: Nehmen wir *zuerst* an, beide Gleichungen hätten nicht-negative Lösungen. $k_1 = ax_1 + by_1$, $k_2 = ax_2 + by_2$, $k_1 + k_2 = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2)$, $(a - 1)(b - 1) - 1 = ax_3 + by_3$, $x_3 \geqq 0$, $y_3 \geqq 0$, also nach Definition 1 $c_{(a-1)(b-1)-1} = 0$. Während des Beweises zu Lemma 8 zeigten wir, daß wenn $\beta > 1$, $n \geqq 3$, $p \geqq 2$, $(n, p) = 1$, $(p - 1)(n - 1) + 2 \leqq i \leqq p(n - 1)$, dann $c_{i-n} = \beta - 1$ falls $i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, und $c_{i-n} = 0$ falls $i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Da a und b zwei relativ prime Zahlen > 1 sind, ist mindestens eine davon $\geqq 3$. O.B.d.A. $b \geqq 3$. Nehmen wir $a = p$, $b = n$, $i = a(b-1)$, dann $i - n = a(b-1) - b = (a-1)(b-1) - 1$. Weil $i = a(b - 1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, a)$, folgt aus Lemma 8, daß $c_{i-n} = c_{(a-1)(b-1)-1} = \beta - 1 > 0$. Das widerspricht $c_{(a-1)(b-1)-1} = 0$; es ist daher *nicht* möglich, daß beide Gleichungen nicht-negative Lösungen haben.

Nehmen wir *als nächstes* an, daß eine der Gleichungen, z. B. $k_1 = ax + by$, keine nicht-negative Lösung hat. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist $x_1 = x_0 + mb$, $y_1 = y_0 - ma$. Es sei $\bar{x}_1$ eine spezielle Lösung; dann existiert ein l, so daß $lb \leqq \bar{x}_1 < lb + b$. $\bar{\bar{x}}_1 = \bar{x}_1 - lb$ ist auch Lösung, und $0 \leqq \bar{\bar{x}}_1 < b$. Da die Gleichung keine nicht-negative Lösung hat, muß das dazugehörige $\bar{\bar{y}}_1$ negativ sein. Also:

$0 \leqq \bar{\bar{x}}_1 < b$, $\bar{\bar{y}}_1 < 0$; $\bar{\bar{x}}_1 + 1 \leqq b$, $\bar{\bar{y}}_1 + 1 \leqq 0$. $x_2 = b - 1 - \bar{\bar{x}}_1 \geqq 0$,

$y_2 = -\bar{\bar{y}}_1 - 1 \geqq 0$; $ax_2 + by_2 = a(b - 1 - \bar{\bar{x}}_1) + b(-\bar{\bar{y}}_1 - 1) =$

$= ab - a - a\bar{\bar{x}}_1 - b\bar{\bar{y}}_1 - b = (a - 1)(b - 1) - 1 - (a\bar{\bar{x}}_1 + b\bar{\bar{y}}_1) =$

$= (a - 1)(b - 1) - 1 - k_1 = k_2.$

Also haben wir mit x_2, y_2 eine nicht-negative Lösung der zweiten Gleichung gefunden. Damit ist der Satz bewiesen.

Lemma 11: Wenn $a > 1$, $b > 1$, $p > 0$, $\beta > 1$, dann

$$\sum_{j=0}^{ab-1} \beta^{pj} = \left(\sum_{j=0}^{a-1} \beta^{pj}\right)\left(\sum_{j=0}^{b-1} \beta^{paj}\right).$$

Der Beweis ist offenkundig.

Es sei nun $\beta \geqq 2$, $n \geqq 2$, $p \geqq 1$; dann gibt Lemma 11 eine Faktorenzerlegung von $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$, sobald n eine zusammengesetzte Zahl ist; Satz 1 gibt eine Faktorenzerlegung einer Zahl dieser Form, sobald $p \geqq 2$ und $(n, p) = 1$ ist. Wir können diese Resultate zu einem *Satz 3* zusammenfassen:

Wenn $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$ eine Primzahl ist, dann ist n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar. Für alle anderen Fälle ist uns eine Faktorenzerlegung bekannt.

Dies ist das anfangs angekündigte Ergebnis. Die Umkehrung gilt nicht. Wann eine Zahl von der Form $\sum_{j=0}^{n-1} \beta^{pj}$, wo n eine Primzahl und p entweder gleich 1 oder durch n teilbar ist, eine Primzahl, und wann eine zusammengesetzte Zahl ist, wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

Zur Minkowski-Geometrie, begründet auf dem Flächeninhaltsbegriff[1]

Von

Woldemar Barthel, Saarbrücken

Mit 10 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. November 1958)

Diese Arbeit behandelt einige Fragen der Minkowski-Geometrie, die sich eng an die Theorie der konvexen Körper anschließen und frei von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sind.

Busemann begründete in [15] die Minkowski-Geometrie systematisch auf einem Flächeninhaltsbegriff, den er aus einer vorgegebenen Minkowski-Metrik herleitete. Er wies damit nachdrücklich auf die Bedeutung der Inhaltsmessung für die Geometrie hin. Allerdings darf nicht übersehen werden, daß diese Untersuchungen weitgehend unabhängig von dem benutzten speziellen Flächenmaß sind. Wir werden deshalb einen *Minkowski-Raum* allgemeiner definieren, indem wir in einem affinen Raum für jede Dimension eine „Inhaltsfunktion" vorgeben. Unsere ersten Untersuchungen gelten im wesentlichen den Konvexitätseigenschaften dieser orientierungsabhängigen Flächeninhalte. Anschließend schalten wir eine spezielle Betrachtung über die *Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen*[2] ein und beweisen insbesondere deren Konvexität. Während *Busemann* selbst für die entsprechenden Definitionen und Beweise euklidisch-metrische Hilfsmittel benutzt, wollen wir ausschließlich affine und Minkowski-metrische Begriffe verwenden. Dies dürfte, wie bereits *Pauc* [23] betonte, der Problemstellung angemessener sein. Entsprechend verfahren wir bei dem von *Busemann* stammenden Existenzsatz für eine Transversalgerade zu einer p-dimensionalen Ebene.

---

[1] Vorliegende Abhandlung umfaßt einen dritten Teil der Habilitationsschrift, die der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br. am 14. Juni 1957 vorgelegt wurde.

[2] Vgl. *Bouligand-Choquet* [9], *Busemann* [12], [13], [15] und unsere Note [1].

Die dabei erforderliche Konstruktion ermöglicht uns dann, eine *Konvexitätseigenschaft der Gesamtheit aller Transversalgeraden* zu einer festen p-dimensionalen Ebene herzuleiten. Abschließend untersuchen wir die beiden Grundfiguren des Minkowski-Raumes, nämlich die *Indikatrix und Isoperimetrix*. Daraus kann in invarianter Weise eine $(n-1)$-dimensionale Dualoberfläche bzw. Duallänge gewonnen werden. Für diese sowie die ursprüngliche Länge und $(n-1)$-dimensionale Oberfläche des Minkowski-Raumes diskutieren wir sodann die isodiametrischen und isoperimetrischen Probleme[3]. In dem letzten Abschnitt ist es möglich, fast durchgehend statt der Konvexität nur die Stetigkeit der Längen- und Oberflächenfunktion vorauszusetzen.

Unsere Konzeption, die Minkowski-Räume durch eine Skala voneinander unabhängiger Inhaltsfunktionen zu definieren, legt natürlich einen entsprechenden Ansatz für die Finsler-Räume, d. h. punktal-Minkowskischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten nahe. Allerdings kommt dabei eine neue Schwierigkeit hinzu, nämlich die geeignete Definition eines Parallelismus p-dimensionaler Flächenelemente, welcher deren Flächeninhalt invariant läßt. Unter diesen Gesichtspunkten haben wir bereits in den Noten [2] und [3] Variantionsprobleme der Finsler-Geometrie für die Grenzdimensionen $p = 1$ und $p = n-1$ behandelt und insbesondere eine differentialgeometrische Charakterisierung der beiden isoperimetrischen Probleme gegeben. Auf den allgemeinen Fall, der wegen der Struktur der Graßmann-Mannigfaltigkeit neue Fragen aufwirft, gehen wir in [7] ein.

1. Grundbegriffe im Minkowski-Raum

Ein *Minkowski-Raum* werde erklärt als n-dimensionaler affiner Raum R_n, in dem jedem orientierten, p-dimensionalen Parallelotop, aufgespannt von Vektoren $X_1, \ldots, X_p$, ein p-dimensionaler Flächeninhalt

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

zugeordnet ist. Dabei sollen diese Inhaltsfunktionen folgende Eigenschaften besitzen:

I. $F^{(p)}(X_\varrho) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ gilt.

II. $F^{(p)}(\lambda^\varrho_{\varrho'} X_\varrho) = \| \lambda^\varrho_{\varrho'} \| F^{(p)}(X_\varrho)$ für $\| \lambda^\varrho_{\varrho'} \| > 0$.

[3] Vgl. unsere Skizze [4].

III. $F^{(p)}(X_1, ..., Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p) \leqq F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1}, \ldots, X_p) + F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a2}, \ldots, X_p)$ für $p < n$.

Wenn in III das Gleichheitszeichen nur für $p+1$ linear abhängige Vektoren steht, so wollen wir von strenger Konvexität sprechen.

Hiermit läßt sich unmittelbar der Flächeninhalt eines p-dimensionalen, orientierten Polyeders definieren. Die zuletzt geforderte Konvexität der Inhaltsfunktionen hat dann ein Analogon der Dreiecksungleichung zur Folge.

Satz *über die Simplexungleichung*: Im Fall $p < n$ ist die Summe der p-dimensionalen Flächeninhalte von $p+1$ kohärent orientierten p-dimensionalen Seitensimplexen eines $(p+1)$-dimensionalen Simplex nicht kleiner als der Flächeninhalt des entgegengesetzt orientierten restlichen Seitensimplex. Wenn das $(p+1)$-dimensionale Simplex von den Vektoren $X_0, X_1, \ldots, X_p$ aufgespannt wird, so ist also

$$\frac{1}{p!} F^{(p)}(X_\varrho - X_0) \leqq \sum_{\delta=0}^{p} \frac{1}{p!} F^{(p)}(-X_0, \ldots, -X_{\delta-1}, X_{\delta+1}, \ldots, X_p). \quad (1, 1)$$

Wird zusätzlich in III strenge Konvexität verlangt, so gilt auch in (1, 1) dann und nur dann Gleichheit, wenn das $(p+1)$-dimensionale Simplex entartet ist.

Beweis: Der orientierte Rand des $(p+1)$-dimensionalen Simplex $(P_0, P_1, \ldots, P_{p+1})$ ist

$$\sum_{\tau=0}^{p+1} (-1)^\tau (P_0 \ldots P_{\tau-1} P_{\tau+1} \ldots P_{p+1}) =$$

$$= (P_1, \ldots, P_{p+1}) - \sum_{\tau=1}^{p+1} (-1)^{\tau-1} (P_0, \ldots, P_{\tau-1}, P_{\tau+1}, \ldots, P_{p+1}).$$

Setzt man $X_{\tau-1} = \overrightarrow{P_0 P_\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, p+1)$, so werden die orientierten Randkomplexe

$(P_1, \ldots, P_{p+1})$ bzw. $(-1)^{\tau-1} (P_0, \ldots, P_{\tau-1}, P_{\tau+1}, \ldots, P_{p+1})$ für $\tau = 1, \ldots, p+1$

jeweils von den Vektoren

$$X_1 - X_0, \ldots, X_p - X_0 \text{ bzw. } -X_0, -X_1, \ldots, -X_{\delta-1}, X_{\delta+1}, \ldots, X_p \quad (\delta = 0, \ldots, p)$$

aufgespannt. Nunmehr folgt durch sukzessive Anwendung der Eigenschaft III und Vereinfachung nach II

$$F^{(p)}(X_1-X_0, X_2-X_0, \ldots, X_p-X_0) \geqq$$
$$\geqq F^{(p)}(X_1, X_2-X_0, \ldots, X_p-X_0) + F^{(p)}(-X_0, X_2, \ldots, X_p) \geqq$$
$$\geqq F^{(p)}(X_1, X_2, \ldots, X_p) + \sum_{\delta=p}^{1} F^{(p)}(X_1, \ldots, X_{\delta-1}, -X_0, X_{\delta+1}, \ldots, X_p),$$

woraus sich sofort die gesuchte Ungleichung (1, 1) ergibt.

Das Volumen eines orientierten, n-dimensionalen Parallelotops ist natürlich bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

Satz: Für eine Vektorbasis e_i des R_n werde $X_r = X_r^i e_i$ gesetzt. Dann existieren zwei positive Skalardichten[4] $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_-$ vom Gewicht $(+1)$, so daß je nach der Orientierung der n Vektoren X_r

$$F^{(n)}(X_r) = \mathfrak{F} \cdot |\,||\,X_r^i\,||\,| \text{ bzw. } = \mathfrak{F}_- |\,||\,X_r^i\,||\,|$$

gilt.

Beweis: Aus der Eigenschaft II erhält man bei gleicher Orientierung der X_r und e_i

$$F^{(n)}(X_r) = ||\,X_r^i\,||\,F^{(n)}(e_i)$$

sowie bei entgegengesetzter Orientierung

$$F^{(n)}(X_r) = -\,||\,X_r^i\,||\,F^{(n)}\,(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n).$$

Für die nach I positiven Konstanten

$$\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} F^{(n)}(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n) \text{ und } \mathfrak{F}_- \overset{\text{def}}{=} F^{(n)}(e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$$

folgt aber bei einer orientierungstreuen Basistransformation $e_i = x_i^{i'} e_{i'}$ wiederum aus II

$$\mathfrak{F}' = ||\,x_i^{i'}\,||^{-1}\,\mathfrak{F} \text{ und } \mathfrak{F}'_- = ||\,x_i^{i'}\,||^{-1}\,\mathfrak{F}_-.$$

Die Skalardichte $\mathfrak{F}$ ermöglicht nun eine invariante Identifizierung gewisser mit dem R_n verbundener Vektorräume. Zuvor wollen wir jedoch auf eine geometrische Deutung des dualen Vektorraumes[5] eingehen, die rein affinen Charakter besitzt.

Satz: Sei E der *Vektorraum* über dem affinen R_n, der von den Klassen aller translationsgleichen geordneten Punktepaare des R_n gebildet wird. Dann lassen sich jene Vektoren des *Dualraumes* E^* von E, welche vom Nullvektor verschieden sind, als geordnete Paare von parallelen (nicht identischen) Hyperebenen des R_n darstellen, die bis auf Translationen festgelegt sind.

---

[4] Für diesen invariantentheoretischen Begriff vgl. *Schouten* [24] S. 12.

[5] Für vektoralgebraische Begriffe vgl. *Bourbaki* [10] und [11].

Beweis: Ein solches paralleles Hyperebenenpaar u ordnet jedem Vektor $X \in E$ eine reelle Zahl $u(X)$ zu, nämlich das Verhältnis von X zu dem Vektor, der von u aus der Geraden (X) ausgeschnitten wird[6]. Ist X parallel zu u, so werde $u(X) = 0$ gesetzt. u ist dann eine Linearform über E (vgl. Abb. 1). Sei umgekehrt $v(X) \not\equiv 0$ eine Linearform über E, so ist $\{P \mid v(\overrightarrow{OP}) = 1\}$ eine Hyperebene. Denn wenn $X_1, \ldots, X_n$ linear unabhängige Vektoren mit $v(X_i) = 1$ sind, so folgt $\overrightarrow{OP} = \alpha X_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha^i (X_i - X_n)$ und $\alpha = v(\overrightarrow{OP}) = 1$. Damit ist der Linearform $v(X)$ ein geordnetes Paar v paralleler Hyperebenen zugeordnet.

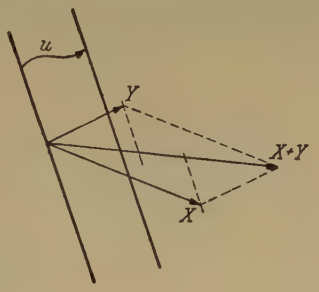


Abb. 1

Es sei noch kurz die geometrische Bedeutung der Operationen in E^* skizziert. Die *Multiplikation* von $u \neq 0$ mit einem Skalar $\lambda \neq 0$ entspricht wegen $(\lambda u)(X) \overset{\text{def}}{=} \lambda . u(X) = u(\lambda X) = 1$ einer Homothetie von u mit dem Verhältnis $1/\lambda$ bezüglich eines Punktes auf einer der Hyperebenen von u. Die *Addition* zweier linear unabhängiger Vektoren $u, v \in E^*$ verläuft nach der in Abb. 2 angegebenen Konstruktion[7]. Für ihre Rechtfertigung braucht man in der Gleichung $(u + v)(X) \overset{\text{def}}{=} u(X) + v(X)$ nur jeweils Vektoren X parallel zu u bzw. v zu betrachten.

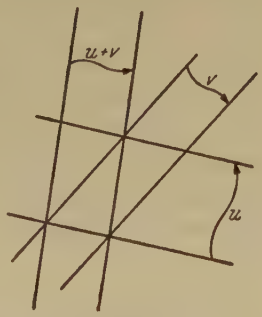


Abb. 2

Das *Skalarprodukt* $\langle X, u \rangle \overset{\text{def}}{=} u(X)$ erhält jetzt durch seine Definition eine geometrische Deutung. Sind übrigens $X \in E$ und $u \in E^*$ keine Nullvektoren, so ist $\langle X, u \rangle = 0$ gleichbedeutend mit dem Parallelismus des Vektors X zum Hyperebenenpaar u.

Die erwähnte Identifizierung vermittelt nun der

Isomorphiesatz: Die Skalardichte $\mathfrak{F}$ gestattet, durch

---

[6] In dieser Arbeit bezeichne $(X_\varrho) = (X_1, \ldots, X_p)$ einen Vektorraum oder eine nur bis auf Translationen festgelegte Ebene, die von Vektoren $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannt wird. $(X_\varrho)_P$ sei dann der lineare Unterraum, welcher durch Abtragen der Vektoren aus (X_ϱ) im Punkt P entsteht.

[7] Vgl. auch *Schouten* [24] S. 8.

$$\mathfrak{F} \,||\, X_1, \ldots, X_{n-1}, X \,|| = u(X)$$

eine invariante Isomorphie

$$\Lambda^{n-1} E \leftrightarrow E^*$$

zu definieren. Dadurch entspricht also dem $(n-1)$-Vektor $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \neq 0$ ein ihm paralleles Paar u von geordneten Hyperebenen, so daß $X_1, \ldots, X_{n-1}$ mit einem Vektor $Y \in E$, der die beiden Hyperebenen im Sinne ihrer Orientierung verbindet, ein positiv orientiertes Parallelotop vom Volumen 1 bilden (vgl. Abb. 3).

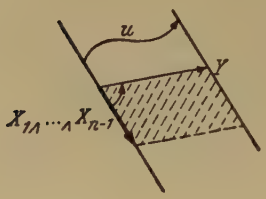


Abb. 3

Beweis: für diese Abbildung gilt zunächst natürlich $\lambda X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow \lambda u$. Sind andererseits Z_1, Z_2 zwei $(n-1)$-Vektoren mit $Z_j \leftrightarrow u_{(j)} \in E^*$, so lassen sie sich in der Form

$$Z_j = X_{1j} \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}$$

darstellen. Daraus folgt wegen

$$\begin{aligned} || X_{11} + X_{12}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || &= || X_{11}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || + \\ &+ || X_{12}, X_2, \ldots, X_{n-1}, X || \end{aligned}$$

aber $Z_1 + Z_2 \leftrightarrow u_{(1)} + u_{(2)}$.

Jetzt kommen wir auf die allgemeinen Inhaltsfunktionen zurück. Sie induzieren nämlich in den jeweiligen Graßmann-Kegeln positiv homogene und konvexe Funktionen. Bevor wir dies nachweisen, soll kurz an einige bekannte Grundeigenschaften der Graßmann-Mannigfaltigkeiten und -Kegel erinnert werden.

Satz:

A. Die *Graßmann-Mannigfaltigkeit* G_n^p, definiert als Gesamtheit der p-dimensionalen Unterräume von E, ist eine ganz-rationale Mannigfaltigkeit der Dimension $p(n-p)$ im $\{\binom{n}{p}-1\}$-dimensionalen projektiven Raum.

B. Der als Menge der *einfachen* p-Vektoren aus $\Lambda^p E$ definierte *Graßmann-Kegel* GK_n^p ist außerhalb des Nullvektors eine $(p(n-p)+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\binom{n}{p}$-dimensionalen affinen Raum $\Lambda^p E$.

Beweis: Für einen p-Vektor $Z \neq 0$ über E ist $V_Z = \{X \in E \,|\, Z \wedge X = 0\}$ ein Unterraum von E, und zu jeder Basis $X_1, \ldots, X_q$ aus V_Z existiert ein $(p-q)$-Vektor Y mit $Z = Y \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_q$. Insbesondere ist also

ein *einfacher* p-Vektor $Z \neq 0$ durch $\dim V_Z = p$ gekennzeichnet und die Proportionalität zweier einfacher p-Vektoren $Z_1 = \lambda Z_2 \neq 0$ äquivalent zu $V_{Z_1} = V_{Z_2}$[8]. Die Abbildung $Z \to V_Z$ definiert daher eine eineindeutige Zuordnung zwischen den p-dimensionalen Unterräumen $V_Z \subset E$ und den von *einfachen* p-Vektoren $Z \neq 0$ erzeugten eindimensionalen Unterräumen $(Z) \subset \Lambda^p E$. Wird jetzt eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ von E gewählt und

$$Z = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} Z^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, \quad X = X^i e_i$$

gesetzt, dann folgt

$$Z \wedge X = (p+1) \sum_{i_1 < \ldots < i_{p+1}} Z^{[i_1 \ldots i_p} X^{i_{p+1}]} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}.$$

Die Einfachheit von $Z \neq 0$ ist also äquivalent dazu, daß die $\binom{n}{p+1}$ Gleichungen in X^i

$$Z^{[i_1 \ldots i_p} X^{i_{p+1}]} = 0 \tag{1,2}$$

den Rang $n-p$ haben. Sei etwa die Komponente $Z^{1 \ldots p} \neq 0$, so ist bereits

$$\left.\begin{aligned} Z^{\bar{\mu}2 \ldots p} X^1 + Z^{1\bar{\mu}3 \ldots p} X^2 + \ldots + Z^{1 \ldots p-1\bar{\mu}} X^p - Z^{1 \ldots p} X^{\bar{\mu}} = 0 \\ (\bar{\mu} = p+1, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{1,3}$$

ein Teilsystem von (1,2) mit dem Rang $n-p$, wie man aus seiner Matrix erkennt. Deshalb hat das Gleichungssystem (1,2) dann und nur dann den Rang $n-p$, wenn alle Größen

$$\frac{Z^{i_1 \ldots i_p}}{Z^{1 \ldots p}}$$

Linearkombinationen der $p(n-p)$ speziellen Größen

$$\frac{Z^{\bar{\mu}2 \ldots p}}{Z^{1\,2 \ldots p}}, \ldots, \frac{Z^{1 \ldots p-1\,\bar{\mu}}}{Z^{1 \ldots p-1\,p}} \quad (\bar{\mu} = p+1, \ldots, n)$$

darstellen. Hiermit haben wir eine lokale Parameterdarstellung der Graßmann-Mannigfaltigkeit im $(\binom{n}{p}-1)$-dimensionalen projektiven Raum der homogenen Koordinaten $Z^{i_1 \ldots i_p}$ gewonnen, aus der sich unmittelbar die Behauptungen des Satzes ergeben. Die einem p-dimensionalen Unterraum $V_Z \subset E$ zugeordneten Komponenten $Z^{i_1 \ldots i_p}$ sind seine homogenen Graßmann-Koordinaten.

Nunmehr können wir weitere Folgerungen für die Inhaltsfunktionen des Minkowski-Raumes herleiten.

Satz: Die von den Inhaltsfunktionen in den zugehörigen Graßmann-Kegeln GK_n^p induzierten Funktionen

[8] Vgl. *Bourbaki* [11] S. 94/96 Proposition 3, Corollaire 1 und 2.

$$f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) = F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p)$$

haben die Eigenschaften

i. $f^{(p)}(Z) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $Z = 0$ gilt.

ii. $f^{(p)}(\lambda Z) = \lambda f^{(p)}(Z)$ für $\lambda > 0$.

iii. $f^{(p)}(Z_1 + Z_2) \leqq f^{(p)}(Z_1) + f^{(p)}(Z_2)$ für $p < n$, wenn Z_1, Z_2, $Z_1 + Z_2 \in GK_n^p$.

Beweis: Wir setzen $Z = X_1 \wedge \ldots \wedge X_p$ oder in Komponenten

$$Z^{i_1 \ldots i_p} = p!\ X_1^{[i_1} \ldots X_p^{i_p]}.$$

Nun hat $Z \neq 0$ bei geeigneter Reihenfolge der Basisvektoren sicher eine positive Komponente. Ist etwa $Z^{1 \ldots p} > 0$, so transformieren wir die X_ϱ in p neue Vektoren mit den p ersten Komponenten

$$X_\varrho^\mu U_{\varrho'}^\varrho = \delta_{\varrho'}^\mu, \qquad (\mu = 1, \ldots, p). \tag{1,4}$$

Die $n-p$ restlichen Komponenten sind dann nach (1,3)

$$\begin{aligned} X_\varrho^{\bar\mu} U_{\varrho'}^\varrho &= \frac{Z^{1 \ldots p} X_\varrho^{\bar\mu}}{Z^{1 \ldots p}} U_{\varrho'}^\varrho \\ &= \sum_{\delta=1}^{p} \frac{Z^{1 \ldots \delta-1\, \bar\mu\, \delta+1 \ldots p} X_\varrho^\delta}{Z^{1 \ldots p}} U_{\varrho'}^\varrho \\ &= \frac{Z^{1 \ldots \varrho'-1\, \bar\mu\, \varrho'+1 \ldots p}}{Z^{1 \ldots p}}, \qquad (\bar\mu = p+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Jetzt ist aber wegen (1.4)

$$\| U_{\varrho'}^\varrho \| = \frac{1}{Z^{1 \ldots p}},$$

so daß man aus Eigenschaft II erhält

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p) = Z^{1 \ldots p} F^{(p)} \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \\ \dfrac{Z^{p+1\ 2 \ldots p}}{Z^{1 \ldots p}} & \ldots & \dfrac{Z^{1 \ldots p-1\ p+1}}{Z^{1 \ldots p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{Z^{n\ 2 \ldots p}}{Z^{1 \ldots p}} & \ldots & \dfrac{Z^{1 \ldots p-1\ n}}{Z^{1 \ldots p}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{def}}{=} f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p).$$

Schließlich setzen wir noch $f^{(p)}(0) = 0$. Die Eigenschaften I bis III haben nun jeweils die Beziehungen i bis iii zur Folge. Dabei muß für iii beachtet werden, daß die Summe zweier einfacher p-Vektoren Z_1+Z_2 dann und nur dann wieder einen einfachen p-Vektor darstellt, wenn $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) \geqq p-1$ ist[9]. Diese Aussage läßt sich folgendermaßen einsehen: Ist Z_1+Z_2 ein einfacher p-Vektor und $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) < p$, so existiert ein Vektor $X \in V_{Z_1+Z_2}$, der nicht zu $V_{Z_1} \cap V_{Z_2}$ gehört. Für ihn ist

$$Z_1 \wedge X = -Z_2 \wedge X \neq 0,$$

woraus $\dim(V_{Z_1}+V_{Z_2}) = p+1$ und damit $\dim(V_{Z_1} \cap V_{Z_2}) = p-1$ folgt.

Die Funktion $F^{(n)}(X_\varrho)$ führt wegen des zweiten Satzes dieser Nr. natürlich sofort zu einem Volumen im Minkowski-Raum, das dem Lebesgueschen Maß proportional ist:

$$V(\mathfrak{M}) = \mathfrak{F} \mid \mathfrak{M} \mid_n \text{ bzw. } V_-(\mathfrak{M}) = \mathfrak{F}_- \cdot \mid \mathfrak{M} \mid_n, \tag{1,5}$$

je nachdem die meßbare Menge $\mathfrak{M}$ positiv oder negativ orientiert ist. Andererseits ist durch die allgemeine Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_\varrho)$ der Flächeninhalt eines p-dimensionalen Polyeders gegeben, womit nach den verschiedenen aus der euklidischen Geometrie bekannten Verfahren (*Lebesgue* usw.[10]) Flächenmaße für gewisse Klassen p-dimensionaler Flächenstücke konstruiert werden können. Diese Definitionen und ihr gegenseitiges Verhältnis soll hier nicht behandelt werden, in Nr. 4 werden wir lediglich die $(n-1)$-dimensionalen Minkowskischen Flächenmaße einführen.

2. Choquet-Busemannsche Inhaltsfunktionen

Die im Minkowski-Raum vorgegebene eindimensionale Inhaltsfunktion bestimmt als Distanzfunktion einen konvexen Körper, der den Ursprung im Innern enthält. Die Frage, ob sich nun allein aus der Vorgabe einer solchen Eichfigur $\mathfrak{E}$ im R_n eine Skala von Inhaltsfunktionen konstruieren und damit der R_n zu einem Minkowski-Raum im Sinne des letzten Abschnittes ausstatten läßt, kann recht vielfältig beantwortet werden. Die einzige bisher ausführlich untersuchte Lösung dieses Problems führt zu den Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen, die wir hier kurz betrachten wollen[11].

---

[9] Vgl. *Bourbaki* [11] S. 99 Exercice 6.

[10] Vgl. *Cesari* [16], *Nöbeling* [20]—[22] und *M. Kneser* [17].

[11] Vgl. *Bouligand-Choquet* [9], *Busemann* [12], [13] und unsere Note [1].

Zunächst soll ein Volumen eingeführt werden, das ein nicht-triviales Haarsches Maß ist. Ein solches ist aber bis auf einen Faktor eindeutig[12] bestimmt, also dem auf ein beliebiges Einheitsparallelotop bezogenen Lebesgueschen Maß proportional

$$\mathfrak{F} \cdot |\, \mathfrak{M} \,|_n. \tag{2,1}$$

Die noch willkürliche Skalardichte $\mathfrak{F}$ werde jetzt festgelegt durch die

Forderung 1: Das Volumen des Eichkörpers $\mathfrak{E}$ sei eine nur von der Dimension abhängige Konstante, für die aus rein konventionellen Gründen das Volumen der n-dimensionalen euklidischen Einheitskugel

$$\omega^{(n)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

gewählt wird.

Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{F} = \frac{\omega^{(n)}}{|\, \mathfrak{E} \,|_n},$$

womit das Volumen eindeutig bestimmt ist. Diese Festsetzung erhält ihre Bedeutung erst beim Übergang zum Flächeninhalt, der eingeführt werden soll durch die weitere

Forderung 2: Der p-dimensionale Flächeninhalt eines von den Vektoren $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannten Parallelotops sei gleich seinem Volumen in dem affinen Raum $(X_\varrho)_0$, versehen mit der induzierten Eichfigur $\mathfrak{E} \cap (X_\varrho)_0$.[6]

Hieraus erhält man unmittelbar die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen

$$F^{(p)}(X_\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{für linear abhängige } X_\varrho \\ \dfrac{\omega^{(p)}}{|\, \mathfrak{E} \cap (X_\varrho)_0 \,|_p} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{2,2}$$

wobei das im Raum $(X_\varrho)_0$ gebildete p-dimensionale Lebesguesche Maß stets auf das von $X_1, \ldots, X_p$ aufgespannte Parallelotop als Einheit zu beziehen ist. Für diese speziellen Funktionen haben wir den

Satz: Die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen (2,2) besitzen die Eigenschaften

0′. Die Menge $\{P \mid F^{(1)}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\}$ gewinnt man durch Symmetrisierung der Eichfigur $\mathfrak{E}$ am Ursprung 0. $F^{(1)}(X)$ ist also dann und

[12] Vgl. etwa *Loomis* [19].

nur dann Distanzfunktion von $\mathfrak{E}$, wenn die Eichfigur $\mathfrak{E}$ bezüglich 0 symmetrisch ist.

I′. $F^{(p)}(X_\varrho) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für linear abhängige Vektoren X_ϱ gilt.

II′. $F^{(p)}(\lambda^\varrho_{\varrho'} X_\varrho) = |\,|\,\lambda^\varrho_{\varrho'}\,|\,|\,F^{(p)}(X_\varrho)$.

III′. Unter der zusätzlichen Voraussetzung der Symmetrie von $\mathfrak{E}$ bezüglich 0 ist

$$F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p) \leqq$$
$$\leqq F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a1}, \ldots, X_p) + F^{(p)}(X_1, \ldots, Y_{a2}, \ldots, X_p) \text{ für } p < n,$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn

a) $X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p$ linear abhängig sind oder

b) $\mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y_1 Y_{a1} + y_2 Y_{a2} + \sum\limits_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \text{ mit } y_1 y_2 \geqq 0\}$ ein Zylinderstumpf mit den beiden Schnittflächen $\mathfrak{E} \cap (X_1, \ldots, Y_{ai}, \ldots, X_p)_0$ ist.

Bei streng konvexem Eichkörper $\mathfrak{E}$ kann natürlich Fall b) nicht auftreten.

IV′. $F^{(p)}(X_\varrho)$ ist außerhalb der Nullstellen ebensooft stetig differenzierbar wie die Distanzfunktion $L(X)$ der Eichfigur $\mathfrak{E}$.

Beweis: Während der Eigenschaften 0′ bis II′ trivial sind, folgt III′ aus Teil B des Busemannschen Satzes (vgl. unsere Note [5] Nr. 2, deren Symbolik auch hier benutzt werden soll). Sind nämlich die $p+1$ Vektoren $X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p$ linear unabhängig, so können wir im $(p+1)$-dimensionalen Raum $(X_1, \ldots, Y_{a1}, Y_{a2}, \ldots, X_p)_0$ das Halbbüschel betrachten, welches von dem Träger $T = (X_1, \ldots, X_{a-1}, X_{a+1}, \ldots, X_p)_0$ und der Geraden $\overrightarrow{OP} = Y_{a1} + \lambda(Y_{a2} - Y_{a1})$ erzeugt wird. Für die Schnitte von $\mathfrak{E}$ mit den p-dimensionalen Halbebenen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ dieses Halbbüschels

$$\mathfrak{K}_i \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y_i Y_{ai} + \sum_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \text{ mit } y_i \geqq 0\}$$

ist dann

$$\tfrac{1}{2}\,|\,\mathfrak{K}_1\,|\,_p^{-1} + \tfrac{1}{2}\,|\,\mathfrak{K}_2\,|\,_p^{-1} \geqq |\,[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2]_{1/2}\,|\,_p^{-1}$$

und wegen der Konvexität von $\mathfrak{E}$

$$\geqq |\,\mathfrak{E} \cap \{P \mid \overrightarrow{OP} = y\,\tfrac{1}{2}(Y_{a1} + Y_{a2}) + \sum_{\delta \neq a} x^\delta X_\delta \quad \text{mit} \quad y \geqq 0\}\,|\,_p^{-1}.$$

Bezieht man dieses in der Halbebene $\lambda = \frac{1}{2}$ gebildete p-dimensionale Maß jetzt auf das von den Vektoren $X_1, \ldots, Y_{a1} + Y_{a2}, \ldots, X_p$ aufgespannte Einheitsparallelotop und beachtet man schließlich die *Symmetrie* der Eichfigur $\mathfrak{E}$, so folgt in der Tat die Konvexität III′. Dabei ist die Symmetrie von $\mathfrak{E}$ wesentlich, da sonst die Symmetriesierung von $\mathfrak{E}$ an 0 nicht notwendig einen konvexen Körper ergibt, also bereits $F^{(1)}(X)$ nicht konvex zu sein braucht. Wegen des Nachweises der Differenzierbarkeit IV′ verweisen wir auf unsere Note [1] S. 363—364.

Die Choquet-Busemannschen Inhaltsfunktionen sind stets von der Orientierung der zu messenden Parallelotope unabhängig. Aber nach dem eben bewiesenen Satz erscheint ihre Konstruktion ohnehin nur für symmetrische Eichfiguren sinnvoll. Unter dieser Zusatzvoraussetzung besitzt das n-dimensionale Choquet-Busemannsche Maß noch die bemerkenswerte Eigenschaft, mit dem n-dimensionalen Hausdorffschen Maß bezüglich der durch $\mathfrak{E}$ erzeugten Metrik identisch zu sein. Dies wurde zuerst von *Busemann* [13] S. 241—242 erkannt und mittels der isodiametrischen Ungleichung[13] bewiesen.

Weiterhin stellt sich die Frage, wodurch eigentlich die Choquet-Busemannsche Konstruktion von Inhaltsfunktionen aus einer Eichfigur vor anderen möglichen Wegen ausgezeichnet ist. *Busemann* [13] S. 242 bis 243 beantwortet dies mit dem Nachweis, daß ein Volumen (2,1) notwendig die Forderung 1 erfüllt, wenn es folgender Variante des Kolmogoroffschen Prinzips[14] genügt: Bei zwei bezüglich 0 symmetrischen Eichfiguren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ soll aus

$$\bigcup_{i=1}^{M} (P_i + \mathfrak{E}') \supset \mathfrak{E} \supset \bigcup_{i=1}^{N} (Q_i + \mathfrak{E}'),$$

wo sich die N Kugeln $Q_i + \mathfrak{E}'$ höchstens berühren dürfen, für die entsprechenden Volumina stets

$$M \,.\, \mathfrak{F} \geqq \mathfrak{F}' \geqq N \,.\, \mathfrak{F}$$

folgen.

Auf diese eben skizzierten und die von *Busemann* daran angeschlossenen Untersuchungen über eine „intrinsic area", d. h. ein nur von den geodätischen Abständen abhängiges Flächenmaß, wollen wir an dieser Stelle nicht näher eingehen.

---

[13] Vgl. auch unsere Note [6] Nr. 1.
[14] Vgl. *Kolmogoroff* [18].

3. Transversalität zu einer p-dimensionalen Ebene

Die Inhaltsfunktion erlauben, im Minkowski-Raum einen allgemeinen Transversalitätsbegriff einzuführen.

Definition: Im Minskowski-Raum sei $(X_1, \ldots, X_p)$ eine *orientierte* p-dimensionale Ebene und (Y) eine Gerade. Dann heißt

$$(Y) \textit{ transversal} \text{ zu } (X_1, \ldots, X_p)$$

oder

$$(X_1, \ldots, X_p) \textit{ normal} \text{ zu } (Y),$$

wenn bei Parallelprojektion längs Y auf $(X_1, \ldots, X_p)$ der Flächeninhalt jedes p-dimensionalen Parallelotops aus $(Y, X_1, \ldots, X_p)$, dessen Orientierung dabei in die von $(X_1, \ldots, X_p)$, übergeht, nicht vergrößert wird:

$$F^{(p)}(X_\varrho + \lambda_\varrho Y) \geqq F^{(p)}(X_\varrho).$$

Normal- und Transversalraum sind natürlich linear unabhängig. Für ihre Existenz und eventuelle Eindeutigkeit gilt der auf *Busemann* [15] S. 168 zurückgehende

Satz:

A. In einer $(p+1)$-dimensionalen Ebene des Minkowski-Raumes existiert zu jeder Geraden ein Paar orientierter p-dimensionaler *Normalebenen*, deren Orientierungen bezüglich Projektion längs der Geraden entgegengesetzt sind. Dieses Paar ist bis auf Translation eindeutig bestimmt, wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ streng konvex ist.

B. In der $(p+1)$-dimensionalen Ebene existiert zu jeder orientierten p-dimensionalen Ebene eine *transversale Gerade*. Sie ist bis auf Translation eindeutig bestimmt, wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen total differenzierbar ist.

Beweis: Wir geben eine orientierte p-dimensionale Ebene $(A_1, \ldots, A_p)$ sowie eine dazu nicht parallele Gerade (B) vor und zeichnen in dem $(p+1)$-dimensionalen Vektorraum $S \overset{\text{def}}{=} (B, A_1, \ldots, A_p)$ eine feste Basis und Orientierung aus. Diese ermöglicht dann analog zum Isomorphiesatz in Nr. 1 eine Isomorphie $S^* \leftrightarrow \wedge^p S$, welche in S^* eine Stützfunktion

$$H(u) \overset{\text{def}}{=} f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) = F^{(p)}(X_1, \ldots, X_p)$$

induziert. Alle weiteren Überlegungen beziehen sich jetzt auf den Raum $(B, A_1, \ldots, A_p)_0$. Die dort definierte Menge

$$\mathfrak{R} = \{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u \rangle \leqq H(u) \text{ für alle } u\} \tag{3,1}$$

enthält sicher den Ursprung 0, der wegen der Stetigkeit von $H(u)$ sogar Innenpunkt ist, und stellt als Durchschnitt aller Halbräume

$$\{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u\rangle \leqq H(u)\} \tag{3,2}$$

einen konvexen Körper dar. Man beachte, daß dies allein aus den Eigenschaften i, ii und der Stetigkeit von $f^{(p)}(Z)$ folgt!

Diese Voraussetzungen genügen nun auch zum *Existenzbeweis des Teiles A*: In jedem der beiden Schnittpunkte $P^{(j)}$ $(j=1;2)$ der Geraden $(B)_0$ mit dem Rand von $\mathfrak{K}$ existiert eine p-dimensionale Stützebene mit der Richtung $u^{(j)}$ an den konvexen Körper $\mathfrak{K}$, für die

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u^{(j)}\rangle = H(u^{(j)}) \tag{3,3}$$

ist; denn jeder Randpunkt von $\mathfrak{K}$ liegt auf einer einen Halbraum (3,2) begrenzenden p-dimensionalen Ebene. Andererseits ist aber wegen $P^{(j)} \in \mathfrak{K}$ für alle p-dimensionalen Ebenenrichtungen u

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u\rangle \leqq H(u). \tag{3,4}$$

Vermöge der eingangs definierten Isomorphie ist nun $u^{(j)} \leftrightarrow X_1^{(j)} \wedge \ldots \wedge X_p^{(j)}$. Für alle $u \leftrightarrow (X_1^{(j)} + \lambda_1 B) \wedge \ldots \wedge (X_p^{(j)} + \lambda_p B)$ gilt dann

$$\langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u\rangle = \langle \overrightarrow{OP^{(j)}}, u^{(j)}\rangle,$$

so daß aus (3,3) und (3,4)

$$H(u^{(j)}) \leqq H(u)$$

d. h.

$$F^{(p)}(X_\varrho^{(j)}) \leqq F^{(p)}(X_\varrho^{(j)} + \lambda_\varrho B)$$

folgt. Die oben konstruierten Stützebenen sind also tatsächlich ein Paar p-dimensionaler Normalebenen zu (B) mit der im Satz angegebenen Orientierungseigenschaft. Nehmen wir jetzt strenge Konvexität von $f^{(p)}(Z)$ an, so ist $H(u)$ Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ und bei jeder Stützebene an $\mathfrak{K}$ wird in (3,2) das Gleichheitszeichen für den Berührungspunkt angenommen. Gäbe es jetzt in einem Randpunkt $P \in \mathfrak{K}$ zwei verschiedene Stützebenen mit den Richtungen u und v, dann wäre

$$\langle \overrightarrow{OP}, u+v\rangle = H(u) + H(v) > H(u+v),$$

was aber (3,1) widerspricht.

Zum *Existenzbeweis des Teiles B* benötigen wir auch die Konvexität von $f^{(p)}(Z)$: Weil dann $H(u)$ Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ ist, gilt für den Berührungspunkt P' von $\mathfrak{K}$ mit der Stützebene der Richtung $u' \leftrightarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$

$$\langle \overrightarrow{OP'}, u' \rangle = H(u').$$

Hieraus folgt wie im Anschluß an (3,3), daß $(\overrightarrow{OP'})$ transversal zu $(A_1, \ldots, A_p)$ ist. Setzen wir nun noch die totale Differenzierbarkeit von $F^{(p)}(X_\varrho)$ und damit von $H(u)$ voraus, so ist die Richtungsderivierte

$$H'(u; v) = \lim_{h \to +0} \frac{H(u+hv) - H(u)}{h}$$

$$= \lim_{h \to +0} \left(\frac{\partial H(u)}{\partial u_i} v_i + 0(h) \right) = \frac{\partial H(u)}{\partial u_i} v_i$$

mit $i = 1, \ldots, p+1$. Sie ist die Stützfunktion des Durchschnitts von $\mathfrak{R}$ mit der zur Richtung u gehörigen p-dimensionalen Stützebene. Als lineare Funktion in v ist sie aber Stützfunktion eines Punktes.

Nachdem in einer $(p+1)$-dimensionalen Ebene die Existenz der Transversalgeraden zu einer p-dimensionalen Ebene gesichert ist, wollen wir die Menge aller Transversalgeraden dieser p-dimensionalen Ebene untersuchen, die im n-dimensionalen Minkowski-Raum konstruiert werden können.

Satz: Gegeben sei eine orientierte p-dimensionale Ebene A. Die Transversalgeraden, welche in einer die Ebene A umfassenden $(p+1)$-dimensionalen Ebene liegen und durch einen festen Punkt $0 \in A$ gehen, erzeugen einen konvexen Kegel. Alle solchen Transversalkegel, die zu A durch den Punkt 0 im n-dimensionalen Minkowski-Raum existieren, haben nur den Punkt 0 gemeinsam und bilden ein $(n-p-1)$-parametrisches *konvexes Bündel*. Dies heißt, der Durchschnitt aller Transversalkegel zu A durch 0 mit jeder Hyperebene, die 0 nicht enthält, ist eine $(n-p-1)$-parametrische *konvexe* Schar konvexer Körper:

$$\mathfrak{k}((1-\vartheta) \Lambda_0 + \vartheta \Lambda_1) \subset (1-\vartheta)\, \mathfrak{k}(\Lambda_0) + \vartheta\, \mathfrak{k}(\Lambda_1)$$

für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und je zwei Λ_0, Λ_1 des $(n-p-1)$-dimensionalen Parameterraumes[15].

Wenn $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen total differenzierbar ist, stellt diese Gesamtheit aller Transversalgeraden zu A durch 0 eine $(n-p)$-dimensionale Ebene dar, die A nur im Punkt 0 schneidet.

Beweis: (B_0) und (B_1) seien zwei Geraden, die transversal zu der orientierten p-dimensionalen Ebene $(A_1, \ldots, A_p)$ sind und mit dieser

[15] Der Begriff der konvexen Schar wurde analog zu dem bei *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 32—34 eingeführten Begriff der konkaven Schar gebildet.

einen $(p+2)$-dimensionalen Vektorraum $S \overset{\text{def}}{=} (B_1, B_0, A_1, \ldots, A_p)$ aufspannen. In ihm sollen die angegebenen Vektoren eine Basis und Orientierung auszeichnen. Zunächst betrachten wir jedoch den $(p+1)$-dimensionalen Unterraum $S_\vartheta \overset{\text{def}}{=} ((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1, A_1, \ldots, A_p)$ mit $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, in welchem ebenfalls durch die angegebenen Vektoren eine Basis und Orientierung festgelegt sei. Die beim Existenzbeweis der Transversalgeraden durchgeführte Konstruktion liefert dann in dem affinen Raum $((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1, A_1, \ldots, A_p)_0$ einen konvexen Körper $\mathfrak{K}_\vartheta$. Dessen p-dimensionale Stützebenen können durch die Gleichungen

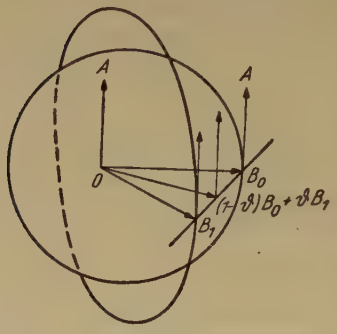


Abb. 4

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \wedge \overrightarrow{OP} = F^{(p)}(X_\varrho)\,((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta B_1) \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p \qquad (3{,}5)$$

dargestellt werden, in denen $X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \in \bigwedge^p S_\vartheta$ die Richtung der Stützebene festlegt und P der variable Ebenenpunkt ist. Um jetzt die Stützfunktion von $\mathfrak{K}_\vartheta$ im $(p+2)$-dimensionalen Raum $(B_1, B_0, A_1, \ldots$ $\ldots, A_p)_0$ zu finden, müssen wir dort sämtliche $(p+1)$-dimensionalen Stützebenen von $\mathfrak{K}_\vartheta$ bestimmen. Das sind aber alle durch eine p-dimensionale Ebene (3,5) gehenden $(p+1)$-dimensionalen Ebenen. Die Richtung einer solchen $(p+1)$-dimensionalen Stützebene läßt sich also festlegen durch einen einfachen $(p+1)$-Vektor

$$X_0 \wedge X_1 \wedge \ldots \wedge X_p \in \bigwedge^{p+1} S,$$

wobei $X_0 \in S$ und $X_1, \ldots, X_p \in S_\vartheta$ linear unabhängig sind. Setzt man

$$X_0 \equiv k(X_0)\,(B_1 - B_0) \bmod S_\vartheta,$$

so sind wegen

$$(B_1 - B_0) \wedge ((1-\vartheta)\, B_0 + \vartheta\, B_1) = B_1 \wedge B_0$$

die $(p+1)$-dimensionalen Stützebenen von $\mathfrak{K}_\vartheta$ durch die Gleichungen

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p \wedge \overrightarrow{OP} = k(X_0)\, F^{(p)}(X_\varrho)\, B_1 \wedge B_0 \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$$

gegeben. Zur Bestimmung der Stützfunktion sind sie konventionsgemäß so zu orientieren, daß im positiven Halbraum keine Punkte von $\mathfrak{K}_\vartheta$ liegen. Das bedeutet aber $k(X_0) \geqq 0$. Mittels der analog zum Isomorphiesatz in Nr. 1 definierten Isomorphie $S^* \leftrightarrow \bigwedge^{p+1} S$ wird nun in S^* die gesuchte Stützfunktion von $\mathfrak{K}_\vartheta$

$$H_\vartheta(u) \overset{\text{def}}{=} k(X_0)\, f^{(p)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_p) \geqq 0 \tag{3,6}$$

induziert, wobei also

$$u \leftrightarrow X_0 \wedge \ldots \wedge X_p.$$

Natürlich ist die Richtung von S_ϑ Linearitätsrichtung dieser Stützfunktion.

Es sei jetzt $0 < \vartheta < 1$. Für $(X_0, \ldots, X_p) \not\ni (A_1, \ldots, A_p)$ muß wegen $\dim(X_0, \ldots, X_p) \cap S_0 = p$ dann $\dim(X_0, \ldots, X_p) \cap (A_1, \ldots, A_p) = p-1$ sein, was eine Darstellung

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p = (B_1 - B_0 + \sigma B_0 + \tau^\varrho A_\varrho) \wedge (B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D$$

mit $D \in \bigwedge^{p-1}(A_1, \ldots, A_p)$ zur Folge hat. Dies ist aber weiter

$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge (B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D$$
$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge (B_1 + (\xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D.$$

Durch Linearkombination der beiden letzten Ausdrücke erhält man

$$X_0 \wedge \ldots \wedge X_p = (1-\vartheta) X_0 \wedge \ldots \wedge X_p + \vartheta X_0 \wedge \ldots \wedge X_p$$
$$= (B_1 - B_0 + \xi^\varrho A_\varrho) \wedge ((1-\vartheta) B_0 + \vartheta B_1 + (\vartheta \xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D$$

und damit nach (3,6)

$$H_\vartheta(u) = f^{(p)}(((1-\vartheta) B_0 + \vartheta B_1 + (\vartheta \xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D)$$
$$\leqq (1-\vartheta) f^{(p)}((B_0 + \eta^\varrho A_\varrho) \wedge D) + \vartheta f^{(p)}((B_1 + (\xi^\varrho + \eta^\varrho) A_\varrho) \wedge D)$$

also

$$H_\vartheta(u) \leqq (1-\vartheta) H_0(u) + \vartheta H_1(u). \tag{3,7}$$

Ist unter obiger Isomorphie

$$v \leftrightarrow Y_0 \wedge \ldots \wedge Y_p,$$

und nehmen wir $(Y_0, \ldots, Y_p) \supset (A_1, \ldots, A_p)$ an, so besteht eine Darstellung

$$Y_0 \wedge \ldots \wedge Y_p = Y \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p.$$

Daraus ergibt sich nach (3,6)

$$H_\vartheta(v) = k(Y) F^{(p)}(A_\varrho) = (1-\vartheta) k(Y) F^{(p)}(A_\varrho) + \vartheta k(Y) F^{(p)}(A_\varrho)$$

also

$$H_\vartheta(v) = (1-\vartheta) H_0(v) + \vartheta H_1(v). \tag{3,8}$$

Jetzt gilt wegen (3,7)

$$H_\vartheta(v+hu) \leqq (1-\vartheta) H_0(v+hu) + \vartheta H_1(v+hu),$$

woraus durch Subtraktion von (3,8)

$$H_\vartheta(v+hu)-H_\vartheta(v) \leqq (1-\vartheta)\,(H_0(v+hu)-H_0(v))+\vartheta(H_1(v+hu)-H_1(v)) \quad (3{,}9)$$

folgt. H_ϑ ist aber als Stützfunktion eines konvexen Körpers eine konvexe Funktion, so daß ihre Richtungsderivierte existiert und daher (3,9) in die Ungleichung

$$H_{\vartheta'}(v, u) \leqq (1 - \vartheta)\, H_0'(v, u) + \vartheta H_1'(v, u)$$

übergeht. Weil nun $H_{\vartheta'}(v, u)$ die Stützfunktion des Durchschnitts $\mathfrak{T}_\vartheta$ von $\mathfrak{K}_\vartheta$ mit der zur Richtung $(B_1 - B_0) \wedge A_1 \wedge \ldots \wedge A_p$ gehörenden $(p+1)$-dimensionalen Stützebene ist, erhält man schließlich[16]

$$\mathfrak{T}_\vartheta \subset (1 - \vartheta)\, \mathfrak{T}_0 + \vartheta\, \mathfrak{T}_1. \quad (3{,}10)$$

Damit ist die allgemeine Behauptung bestätigt; denn die Verbindungsgeraden von 0 mit den Punkten von $\mathfrak{T}_\vartheta$ bilden den Transversalkegel von $(A_1, \ldots, A_p)$ im Raum $((1 - \vartheta)\, B_0 + \vartheta\, B_1, A_1, \ldots, A_p)$. Bei totaler Differenzierbarkeit von $F^{(p)}(X_\varrho)$ außerhalb der Nullstellen ist $\mathfrak{T}_\vartheta$ nach dem vorigen Satz ein Punkt, so daß die Mengenrelation (3,10) eine Gleichheit wird, was den Satz vollständig beweist.

Im Spezialfall $p = 1$ ist dieser Satz natürlich einfacher einzusehen, weil dann $F^{(1)}(X)$ als Distanzfunktion unmittelbar einen konvexen Körper definiert.

4. Indikatrix und Isoperimetrix

In diesem Abschnitt benötigen wir neben der Skalardichte $\mathfrak{F}$ nur die Inhaltsfunktionen $F^{(1)}(X)$ und $F^{(n-1)}(X_\varrho)$, von denen wir vorerst auch nur die Eigenschaften I, II sowie ihre Stetigkeit voraussetzen wollen. Es kommt uns jetzt darauf an, die mit diesen beiden Inhaltsfunktionen *invariant* verbundenen Figuren und deren Bedeutung zu untersuchen.

Den von der Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ im R_n erzeugten kompakten Sternbereich

$$\mathfrak{C} \overset{\text{def}}{=} \{P \mid F^{(1)}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\},$$

der den Ursprung im Innern enthält, wollen wir als *Indikatrix* bezeichnen. Auf sie beziehen sich die nächsten Betrachtungen.

Satz 1: Die Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ definiert eine nicht notwendig eindeutige Abbildung $E^* \overset{\text{in}}{\to\!\!\to} E$, so daß für die zugeordneten Vektoren $u \in E^*$ und $U \in E$ gilt

$$\langle U, u\rangle = F^{(1)}(U)^2.$$

---

[16] Vgl. *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 24 unten und S. 29—30.

Diese Abbildung induziert in E^* eine Stützfunktion $L^*(u)$, die gerade die konvexe Hülle der Indikatrix kennzeichnet. Dabei erhält man dann und nur dann eine Abbildung „auf", wenn die Indikatrix konvex ist, eine eindeutige Abbildung, wenn die Indikatrix streng konvex ist, und eine streng konvexe Funktion $L^*(u)$, wenn durch jeden Randpunkt der Indikatrix *höchstens eine* Stützhyperebene existiert.

Beweis: Sei $y \in E^*$ ein Vektor, dessen erste Hyperebene durch den Ursprung geht und dessen zweite Hyperebene die Indikatrix stützt, so werde ihm der Einheitsvektor Y vom Ursprung zu einem Berührungspunkt zugeordnet. Ein beliebiger Vektor $u = \lambda\, y \in E^*$ mit $\lambda \geqq 0$ werde dann in $U = \lambda\, Y \in E$ abgebildet. Diese Abbildung ist natürlich nur bei euklidischer Metrik linear. Im allgemeinen Fall ist aber die vermöge $u \to\!\!\!\!\to U$ in E^* induzierte Funktion

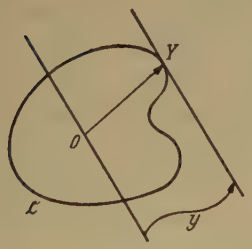


Abb. 5

$$L^*(u) \overset{\text{def}}{=} F^{(1)}(U)$$

eine Stützfunktion. Zunächst ist nämlich $L^*(0) = 0$ und, da die Zuordnung $u \to\!\!\!\!\to U$ für $\lambda > 0$ auch $\lambda\, u \to\!\!\!\!\to \lambda\, U$ zur Folge hat,

$$L^*(\lambda\, u) = F^{(1)}(\lambda\, U) = \lambda\, L^*(u) \text{ für } \lambda > 0.$$

Um nun die Konvexität von L^* nachzuweisen, wählen wir zwei linear unabhängige Vektoren $u, v \in E^*$. Dann werde jeweils die erste Hyper-

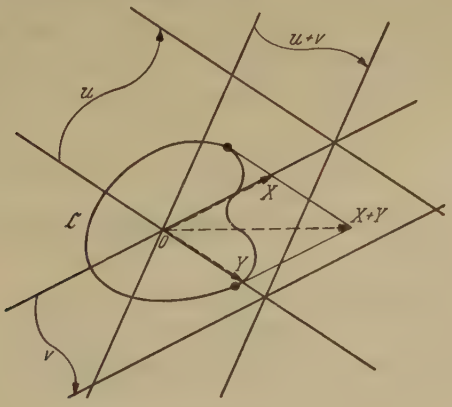


Abb. 6

ebene von u und v durch den Ursprung 0 gelegt und geometrisch $u+v$ konstruiert (vgl. Abb. 6). Dieser Summenvektor soll jetzt zuerst

bezüglich einer Hilfsmetrik H über E^* gemessen werden, die folgendermaßen definiert ist: Man legt die den Einheitsvektoren $\frac{u}{L^*(u)}$ und $\frac{v}{L^*(v)}$ entsprechenden Stützhyperebenen an die Indikatrix und benutzt als Hilfseichkörper jenen Winkelraum dieser beiden Stützhyperebenen, der die Indikatrix enthält. Dann gilt mit den in Figur 6 angegebenen Bezeichnungen

$$\frac{X}{L^*(u)} + \tau\left(\frac{Y}{L^*(v)} - \frac{X}{L^*(u)}\right) = \frac{X+Y}{H(u+v)},$$

woraus mittels Koeffizientenvergleich

$$H(u+v) = L^*(u) + L^*(v)$$

folgt. Weil nun

$$L^*(u+v) \leqq H(u+v)$$

ist, erhält man also

$$L^*(u+v) \leqq L^*(u) + L^*(v).$$

Dabei tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann auf, wenn der Scheitel des genannten Winkelraumes mindestens einen Punkt der Indikatrix enthält.

Mit Hilfe der Skalardichte $\mathfrak{F}$ läßt sich aus der Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ ein $(n-1)$-dimensionaler dualer Flächeninhalt herleiten.

Definition: $X_1, \ldots, X_{n-1}$ seien linear unabhängige Vektoren aus E. Parallel zu ihnen werde eine Stützhyperebene so an die Indikatrix gelegt, daß der Vektor N vom Ursprung zu einem Berührungspunkt eine positive Orientierung von $X_1, \ldots, X_{n-1}, N$ bestimmt. Dann sei der *Dualinhalt* des von den Vektoren $X_1, \ldots, X_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops

$$\bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F} \cdot \| X_1, \ldots, X_{n-1}, N \| > 0.$$

Für ein von $n-1$ linear abhängigen Vektoren erzeugtes Parallelotop sei der Dualinhalt Null.

Korollar 1: Die *duale Inhaltsfunktion* $\bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ besitzt die Eigenschaften i bis iii des letzten Satzes in Nr. 1. Über die Beziehungen von $\bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ zur Längenfunktion $F^{(1)}(X)$ erteilt folgendes Schema Auskunft:

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^{n-1} E & \leftrightarrow & E^* & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\!\rightarrow} & E \\ | & & | & & | \\ \bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) & = & L^*(u) & = & F^{(1)}(U). \end{array}$$

Beweis: Dieses Schema erhält man bis auf den die duale Inhaltsfunktion betreffenden Teil direkt aus dem Isomorphiesatz in Nr. 1 und Satz 1. Wird nun dem $(n-1)$-Vektor $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \in \bigwedge^{n-1} E$ der Vektor $u \in E^*$ zugeordnet, so ist nach obiger Definition

$$\overline{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) = \mathfrak{F} \,||\, X_1, \ldots, X_{n-1}, N \,||$$
$$= \langle N, u \rangle = L^*(u).$$

Vermöge der Isomorphie $\bigwedge^{n-1} E \leftrightarrow E^*$ spiegeln sich also alle Eigenschaften der im letzten Satz untersuchten Funktion $L^*(u)$ in der dualen Inhaltsfunktion wieder.

Neben der Indikatrix spielt noch eine andere aus der Funktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ mittels der Skalardichte $\mathfrak{F}$ hergeleitete Figur eine Rolle. Dies soll im Folgenden genauer untersucht werden.

Satz 2: Die Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ induziert mittels der Isomorphie $\bigwedge^{n-1} E \leftrightarrow E^*$ in E^* eine Funktion $F^*(u)$. Der konvexe Körper

$$\mathfrak{Z} \overset{\text{def}}{=} \{P \mid \langle \overrightarrow{OP}, u \rangle \leqq F^*(u) \text{ für alle } u\},$$

der als *Isoperimetrix*[17] bezeichnet werden soll, erzeugt dann eine nicht notwendig eindeutige Abbildung $E \overset{\text{in}}{\to} E^*$, so daß für die zugeordneten Vektoren $U \in E$ und $u \in E^*$ gilt

$$\langle U, u \rangle = F^*(u)^2.$$

Dabei erhält man dann und nur dann eine Abbildung „auf", wenn $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ konvex ist, und eine eineindeutige Abbildung, wenn $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ konvex und außerhalb des Nullvektors total differenzierbar ist.

Beweis: Ist $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow u \in E^*$, so sei

$$F^*(u) \overset{\text{def}}{=} f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}).$$

Sind jetzt P, Q zwei Punkte der Isoperimetrix, dann folgt für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ unmittelbar

$$\langle \overrightarrow{OP} + \vartheta \overrightarrow{PQ}, u \rangle = \langle (1-\vartheta)\overrightarrow{OP} + \vartheta \overrightarrow{OQ}, u \rangle \leqq F^*(u),$$

also die Konvexität der Isoperimetrix. Natürlich ist $F^*(u)$ im allgemeinen keine Stützfunktion. Sei jetzt Y der Verbindungsvektor des Ursprungs mit einem Randpunkt der Isoperimetrix, so werde ihm jenes parallele Hyperebenenpaar y zugeordnet, dessen erste Hyperebene durch den

[17] Vgl. *Busemann* [15] Nr. 4.

Ursprung geht, dessen zweite Hyperebene die Isoperimetrix in jenem Randpunkt stützt und für das $F^*(y) = 1$ ist. Solch ein Vektor $y \in E^*$ existiert wegen der Stetigkeit von $F^*(u)$ sicher. Einem beliebigen Vektor $U = \lambda\, Y \in E$ mit $\lambda \geqq 0$ werde dann $u = \lambda\, y \in E^*$ zugeordnet. Notwendig und hinreichend dafür, daß für jedes $u \in E^*$ in einer der Definitionsungleichungen der Isoperimetrix das Gleichheitszeichen angenommen wird, ist die Konvexität von $F^*(u)$. Die Bedingung für die Eineindeutigkeit unserer Abbildung entnimmt man schließlich *Bonnesen-Fenchel* [8] S. 26.

Die Isoperimetrix erlaubt nun, eine duale Längenmessung einzuführen, deren Eigenschaften wir zusammenfassen in dem

Korollar 2: Die als Distanzfunktion der Isoperimetrix definierte *duale Längenfunktion* $\overline{F}(U)$ über E besitzt die Eigenschaften I bis III in Nr. 1. Für die Beziehungen von $\overline{F}(U)$ zur $(n-1)$-dimensionalen Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1})$ gilt das Schema:

$$\begin{array}{ccccc} E & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\rightarrow} & E^* & \leftrightarrow & \bigwedge^{n-1} E \\ | & & | & & | \\ \overline{F}(U) & = & F^*(u) & = & f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}). \end{array}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Isomorphiesatz in Nr. 1 und Satz 2.

In einem *2-dimensionalen Minkowski-Raum* verdienen diese Betrachtungen besonderes Interesse, weil dort die ursprüngliche Längenfunktionen $F^{(1)}(X)$ und die daraus hergeleiteten Funktionen $\overline{L}(X)$ und $\overline{F}(U)$ über demselben Raum E definiert sind. Insbesondere muß also ein Zusammenhang zwischen Indikatrix und Isoperimetrix bestehen. Wir wenden uns deshalb jetzt diesem Spezialfall zu[18].

Satz 3: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum besteht der Rand der *Isoperimetrix* aus der Menge aller Punkte Q, die sich folgendermaßen konstruieren lassen (vgl. Abb. 7): Man legt an die Indikatrix eine Stützgerade mit dem Berührungspunkt P und bestimmt Q so, daß

a) $\overrightarrow{OQ}$ parallel zu jener Stützgeraden und

b) $\mathfrak{F}\,||\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}|| = 1$ ist.

Die Gerade parallel zu $\overrightarrow{OP}$ durch Q stützt dann die Isoperimetrix.

Beweis: Nach dem Isomorphiesatz in Nr. 1 wird bei der Isomorphie $E \leftrightarrow E^*$ jedem $X \in E$ die Linearform $u(Y) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{F}\,||X, Y||$ zugeordnet. Die damit in E^* induzierte Funktion $F^*(u) = F^{(1)}(X)$ definiert

[18] Vgl. auch *Busemann* [14] insbesondere S. 868.

dann nach Satz 2 die konvexe Isoperimetrix. Setzt man nun $X = \lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}$, so folgt für die zugeordnete Linearform $u \in E^*$ nach der Konstruktion unseres Satzes

$$\langle \overrightarrow{OQ}, u \rangle = \mathfrak{F} \,||\, \lambda \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \,|| =$$
$$= \lambda \leqq F^{(1)}(\lambda \overrightarrow{OP} + \mu \overrightarrow{OQ}) = F^*(u).$$

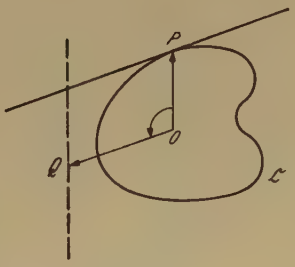


Abb. 7

Da in dieser Ungleichung speziell für $X = \overrightarrow{OP}$ das Gleichheitszeichen angenommen wird, so liegt Q tatsächlich auf dem Rand der Isoperimetrix, und jeder ihrer Randpunkte kann so gewonnen werden.

Die Beziehung zwischen $F^{(1)}(X)$ und der in obiger Definition eingeführten eindimensionalen dualen Inhaltsfunktion $\bar{L}(X)$ wird gekennzeichnet durch das Abbildungsschema:

$$\begin{array}{ccccc} E = \wedge E & \leftrightarrow & E^* & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\rightarrow} & E \\ | & & | & & | \\ X & \leftrightarrow & u = \lambda\, y & \rightarrow\!\!\!\rightarrow & U = \lambda\, Y \\ | & & | & & | \\ \bar{L}(X) & = & L^*(u) & = & F^{(1)}(U), \end{array}$$

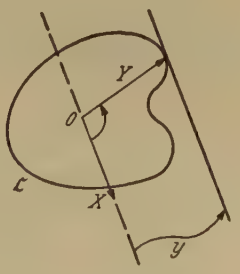


Abb. 8

wie durch Spezialisierung aus Korollar 1 folgt. Wendet man nun die Konstruktion des obigen Satzes auf Abb. 8 an, so ergibt sich das

Korollar 3: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum ist der Körper $\{P \mid \bar{L}(\overrightarrow{OP}) \leqq 1\}$ die am Ursprung gespiegelte Isoperimetrix.

Der Satz 3 erlaubt uns, in einer Minkowski-Ebene die Isoperimetrix aus der Indikatrix zu konstruieren. In entsprechender Weise kann man aber auch umgekehrt die Indikatrix aus der Isoperimetrix „fast" zurückgewinnen.

Satz 4: Im 2-dimensionalen Minkowski-Raum besteht der Rand der *konvexen Hülle der Indikatrix* aus der Menge aller Punkte P, die sich folgendermaßen ergeben (vgl. Abb. 9): Man legt an die Isoperimetrix eine Stützgerade mit dem Berührungspunkt Q und bestimmt P so, daß

a) $\overrightarrow{OP}$ parallel jener Stützgeraden und

b) $\mathfrak{F}\,||\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\,|| = 1$ ist.

Die Gerade parallel zu $\overrightarrow{OQ}$ durch P stützt dann die Indikatrix.

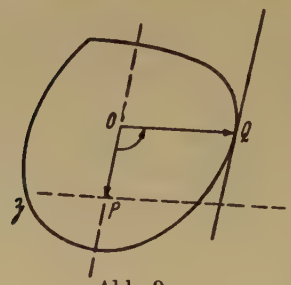


Abb. 9

Beweis: Setzt man $X = -\lambda\overrightarrow{OP} - \mu\overrightarrow{OQ}$, so gilt die zugeordnete Linearform $u \in E^*$ nach der Konstruktion unseres Satzes und Korollar 3

$$\langle\overrightarrow{OP}, u\rangle = \mathfrak{F}\,||-\mu\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP}\,|| =$$
$$= \mu \leqq \overline{L}(-\lambda\overrightarrow{OP} - \mu\overrightarrow{OQ}) = L^*(u).$$

Dabei wird speziell für $X = -\overrightarrow{OQ}$ das Gleichheitszeichen angenommen, so daß P in der Tat auf dem Rand des durch die Stützfunktion $L^*(u)$ definierten konvexen Körpers liegt. Dieser ist aber nach Satz 1 gerade die konvexe Hülle der Indikatrix.

Nach Korollar 2 wird der Zusammenhang speziell zwischen $F^{(1)}(X)$ und der dualen Längenfunktion $\overline{F}(X)$ durch folgendes Schema vermittelt:

$$\begin{array}{ccccc} E & \overset{\text{in}}{\rightarrow\!\!\!\!\rightarrow} & E^* & \leftrightarrow & \wedge\, E = E \\ | & & | & & | \\ U = \lambda Y & \rightarrow\!\!\!\!\rightarrow & u = \lambda y & \leftrightarrow & X \\ | & & | & & | \\ \overline{F}(U) & = & F^*(u) & = & F^{(1)}(X). \end{array}$$

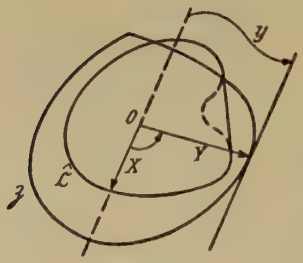


Abb. 10

Wenn bei dieser Abbildung der Endpunkt des Vektors U den Rand der Isoperimetrix durchläuft, so liegen die Endpunkte der Bildvektoren X auf dem Rand der konvexen Hülle $\hat{\mathfrak{C}}$ der Indikatrix, wie man aus der auf Abb. 10 angewandten Konstruktion des letzten Satzes erkennt.

Nach diesen speziellen Betrachtungen wollen wir im n-dimensionalen Minkowski-Raum die verschiedenen isodiametrischen und isoperimetrischen Probleme diskutieren, die sich für Indikatrix $\mathfrak{C}$ und Isoperimetrix $\mathfrak{Z}$ aus den Sätzen unserer Note [6] gewinnen lassen. Hierzu müssen wir *invariante* Minkowski-Oberflächen einführen, die sich von den entsprechenden Minkowskischen Relativ-Oberflächen in [6] Nr. 2 gemäß (1,5) um die Skalardichte $\mathfrak{F}$ unterscheiden, also im Gegensatz zu

den Relativ-Oberflächen von einer speziellen Vektorbasis unabhängig sind.

Definition: Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}$ seien äußere und innere *Minkowski-Oberfläche*[19]

$$\Phi_+(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}+r\mathfrak{Z}) - V(\mathfrak{K})}{r}, \quad \Phi_-(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}) - V(\mathfrak{K}-r\,\mathfrak{Z}^*)}{r}$$

sowie äußere und innere *Minkowskische Dualoberfläche*

$$\bar{\Phi}_+(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}+r\,\hat{\mathfrak{C}}) - V(\mathfrak{K})}{r}, \quad \bar{\Phi}_-(\mathfrak{K}) = \lim_{r \to +0} \frac{V(\mathfrak{K}) - V(\mathfrak{K}-r\hat{\mathfrak{C}}^*)}{r},$$

wobei $\hat{\mathfrak{C}}$ die konvexe Hülle der Indikatrix bezeichnet.

Für die äußere Minkowskische Oberfläche und Dualoberfläche eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops $\mathfrak{P}$, das von den Vektoren $X_1, \ldots, X_{n-1}$ aufgespannt wird, gelten dann die Relationen

$$\Phi_+(\mathfrak{P}) \leqq f^{(n-1)}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) + f^{(n-1)}(-X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}),$$

wo bei konvexer Inhaltsfunktion $f^{(n-1)}$ stets das Gleichheitszeichen steht, und

$$\bar{\Phi}_+(\mathfrak{P}) = \bar{L}(X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}) + \bar{L}(-X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1}).$$

Wählt man nämlich vermöge des Isomorphiesatzes der Nr. 1 die Zuordnung $X_1 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \leftrightarrow u$ und sind $P_\pm$ Berührungspunkte von $\mathfrak{Z}$ mit den Stützhyperebenen der Richtungen $\pm u$, so ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} V(\mathfrak{P}+r\mathfrak{Z}) &= \mathfrak{F}\,||X_1, \ldots, X_{n-1}, \overrightarrow{OP}_+||+\mathfrak{F}\,||-X_1, \ldots, X_{n-1}, \overrightarrow{OP}_-||+0(r) \\ &= \langle \overrightarrow{OP}_+, u\rangle + \langle \overrightarrow{OP}_-, -u\rangle + 0(r) \\ &\leqq F^*(u) + F^*(-u) + 0(r),\end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Der analoge Schluß zur Bestätigung der zweiten Relation führt allerdings zur Gleichheit, weil $L^*(u)$ nach Satz 1 stets Stützfunktion ist, ohne daß die Indikatrix konvex zu sein braucht. Natürlich sind innere Minkowskische Oberfläche und Dualoberfläche eines $(n-1)$-dimensionalen Parallelotops immer Null.

In der Minkowski-Geometrie gelten nun für kompakte Mengen mit Innenpunkten nach [6] Nr. 2 die *isoperimetrischen Ungleichungen*:

---

[19] $\mathfrak{M}^*$ bezeichne das Spiegelbild der Menge $\mathfrak{M}$ bezüglich des Ursprunges 0.

$$\Phi_{\pm}(\mathfrak{K}) \geqq n\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{K})\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{Z}),$$

wobei die Gleichheit erzeugenden konvexen Körper homothetisch zur *Isoperimetrix* $\mathfrak{Z}$ bzw. ihrem Spiegelbild $\mathfrak{Z}^*$ sein müssen, und

$$\overline{\Phi}_{\pm}(\mathfrak{K}) \geqq n\, V^{\frac{n-1}{n}}(\mathfrak{K})\; V^{\frac{1}{n}}(\hat{\mathfrak{C}}),$$

wo die zur Gleichheit führenden konvexen Körper homothetisch zur *konvexen Hülle der Indikatrix* $\hat{\mathfrak{C}}$ bzw. deren Spiegelbild $\hat{\mathfrak{C}}^*$ sind.

Unter den sehr allgemeinen Voraussetzungen dieser Nummer erhält man aus [6] Nr. 1 nur für die in Korollar 2 eingeführte Duallänge die entsprechende *isodiametrische Ungleichung*:

$$\bar{d}(\mathfrak{K}) \geqq 2\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{K})\, V^{-\frac{1}{n}}(\mathfrak{Z}).$$

Dabei wird für den in der Duallänge gemessenen Durchmesser $\bar{d}$ das Gleichheitszeichen nur angenommen, wenn $\mathfrak{K}$ homothetisch zu einer *symmetrischen Isoperimetrix* ist. Setzen wir zum Schluß zusätzlich $F^{(1)}(X)$ als konvex voraus, so gilt auch für die ursprüngliche Längenmessung des Minkowski-Raumes

$$d(\mathfrak{K}) \geqq 2\, V^{\frac{1}{n}}(\mathfrak{K})\, V^{-\frac{1}{n}}(\mathfrak{C}),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für Homothetische zu einer *symmetrischen Indikatrix* steht.

Literatur

[1] *Barthel, W.*: Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie. Math. Zeitschr. **58**, 358—375 (1953).

[2] *Barthel, W.*: Variationsprobleme der Oberflächenfunktion in der Finslerschen Geometrie. Math. Zeitschr. **62**, 23—36 (1955)

[3] *Barthel, W.*: Extremalprobleme in der Finslerschen Inhaltsgeometrie. Annales Universitatis Saraviensis - Scientia **4**, 171—183 (1955).

[4] *Barthel, W.*: Die beiden isoperimetrischen Probleme der Minkowski-Geometrie. Intern. Math. Nachr. **47/48**, 54—55 (1957).

[5] *Barthel, W.*: Zum Busemannschen und Brunn-Minkowskischen Satz. Math. Zeitschr.

[6] *Barthel, W.*: Zur isodiametrischen und isoperimetrischen Ungleichung in der Relativgeometrie. Comm. Math. Helv. **33**, (1959).

[7] *Barthel, W.*: Über metrische Differentialgeometrie, begründet auf dem Begriff eines p-dimensionalen Areals. Math. Ann. **137**, 42—63 (1958).

[8] *Bonnesen, T.* und *W. Fenchel*: Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934.

[9] *Bouligand, G.* und *G. Choquet*: Problèmes liés à des métriques variationelles. C. R. Acad. Sci., Paris **218**, 696—698 (1944).

[10] *Bourbaki, N.*: Algèbre linéaire, Paris 1947.

[11] *Bourbaki, N.*: Algèbre multilinéaire, Paris 1948.

[12] *Busemann, H.*: Intrinsic area. Proc. Nat. Acad. Sci. **32**, 5—8 (1946).

[13] *Busemann, H.*: Intrinsic area. Ann. Math. **48**, 234—267 (1947).

[14] *Busemann, H.*: The isoperimetric problem in the Minkowski plane. Amer. J. Math. **69**, 863—871 (1947).

[15] *Busemann, H.*: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950).

[16] *Cesari, L.*: Surface area. Annals of Mathematics Studies 35, Princeton 1956.

[17] *Kneser, M.*: Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmaß. Arch. Math. **6**, 382—390 (1955).

[18] *Kolmogoroff, A.*: Beiträge zur Maßtheorie. Math. Ann. **107**, 351—366 (1933).

[19] *Loomis, L. H.*: Abstract congruence and the uniqueness of Haar measure. Ann. Math. **46**, 348—355 (1945).

[20] *Nöbeling, G.*: Über die Länge euklidischer Kontinuen I, II. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein. **52**, 132—160, 189—197 (1942).

[21] *Nöbeling, G.*: Über den Flächeninhalt dehnungsbeschränkter Flächen. Math. Zeitschr. **48**, 747—771 (1942/43).

[22] *Nöbeling, G.*: Über die Flächenmaße im euklidischen Raum. Math. Ann. **118**, 687—701 (1941/43).

[23] *Pauc, Chr.*: Referat zu Busemann [15], Zentralblatt für Math. **40**, S. 375 bis 378.

[24] *Schouten, J. A.*: Ricci-Calculus, Berlin 1954.

Minimal Matrix Norms

By

Alston S. Householder, Oak Ridge National Laboratory*

(Received November 16, 1958)

A matrix norm, $\| A \|$, will be taken to be any real-valued function of the elements of a square matrix A, whether real or complex, which satisfies the following four conditions [2]:

I. $A \neq 0 \rightarrow \| A \| > 0$;

II. $\alpha \geq 0 \rightarrow \| \alpha A \| = \alpha \| A \|$;

III. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$;

IV. $\| AB \| \leq \| A \| \, \| B \|$.

Let $\varrho(A)$ represent the spectral radius of A, which is the maximum of $|\lambda_i(A)|$ where $\lambda_i(A)$ is any proper value of A. This is not a norm function as the term is used here, since of the four conditions only (II) is satisfied in general by $\varrho(A)$. However, it is known that for any fixed A, $\varrho(A)$ is the greatest lower bound of $\| A \|$ for all possible norms [3]. Indeed, it can be shown that the bound is actually achieved for a fixed A if and only if A is similar to a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \varrho(\Lambda) > \varrho(B),$$

where Λ is diagonal. Any such matrix will be said to be of class M. When A is of class M, any norm for which $\| A \| = \varrho(A)$ will be called minimal for A. The present paper will be directed toward the construction of norms that are minimal for a given matrix of class M, and, conversely, the construction of matrices of class M for which a given norm is minimal, if any such exist. Evidently if $A \neq 0$ and $\varrho(A) = 0$, then A cannot be of class M.

---

* Operated by Union Carbide Corporation for the U. S. Atomic Energy Commission.

If A and B are both of class M, then there may or may not exist a norm that is minimal for both, but if there is such a norm, then

$$\varrho(A + B) \leq \varrho(A) + \varrho(B),$$

$$\varrho(A\,B) \leq \varrho(A)\,\varrho(B).$$

In other words, the spectral radius does satisfy the conditions of a norm function for any subclass of matrices possessing a common minimal norm.

Given any vector x, one can form a matrix X everywhere null except that its ith column is x (i being arbitrary but fixed), and if one defines the vector norm

$$\| x \| = \| X \|,$$

this scalar function of the elements of x satisfies the conditions (I), (II), and (III) expressed with vectors, instead of with matrices, as arguments. Moreover, (IV) implies that for any vector x and any matrix A, the vector and matrix norms are related by

$$\| A\,x \| \leq \| A \| \quad \| x \|.$$

The vector norm is then said to be consistent with the matrix norm [2]. Given any vector norm, the points defined by

$$K\colon\ \| x \| \leq 1$$

form a bounded convex body, which is to say a closed convex set in the complex n-space, with interior points, and the origin is an interior point [1, 4]. Conversely, given any bounded convex body K with the origin in the interior, a vector norm can be defined by

$$x = x' \,\|\, x \,\|_K,$$

where x' is that vector from the origin in the direction of x (or any vector when $x = 0$) which terminates on the boundary of K[1]. Hereafter any convex body being considered will be understood to be bounded, and to contain the origin as an interior point.

For any convex body K, let $A\,K$ designate the set of points $y = Ax$ with $x \in K$. For $A = \alpha\,I$, a scalar matrix, $\alpha\,K$ may be written in place of AK. Let ν be the smallest non-negative real scalar for which $A\,K \subset \nu\,K$. This defines an association of non-negative real numbers $\nu(A)$ with matrices A, and $\nu(A)$ is a norm, hence will be designated

$$\nu(A) = \| A \|_K.$$

Clearly the norms are consistent.

Lemma 1. *For any matrix A,*

$$\| A \|_K \leq \| A \|,$$

where the norm on the right is any matrix norm consistent with the vector norm belonging to K.

This lemma follows immediately from the consistency property together with the obvious fact that there exists a vector x with $\| x \| = 1$ and

$$\| A x \|_K = \| A \|_K,$$

which is to say that $A K$ and $\| A \|_K K$ have at least one common boundary point. This permits attention to be restricted to those matrix norms belonging to convex bodies. Then K will be said to be minimizing for any matrix A for which the norm belonging to K is minimal. Any K is minimizing for I.

For any two convex sets H and K, let $H \cap K$ represent the intersection, $H \vee K$ the convex hull, and $H + K$ the Minkowski sum, which is the set of all $x + y$ with $x \in H$ and $y \in K$. These are evidently convex, and they are bounded if H and K are bounded. For any x let $[x]$ represent all λx for λ real or complex satisfying $| \lambda | \leq 1$. For any K let $[K]$ represent the convex hull of all $[x]$ with $x \in K$. The operation will be called equilibration.

Lemma 2. *Let* H *and* K *be minimizing for* A. *Then:*

i) *If* $\varkappa \neq 0$, $\varkappa K$ *is minimizing for* A;

ii) *If* G *is nonsingular,* $G K$ *is minimizing for* $G A G^{-1}$;

iii) *If* $\alpha \geq 0$, K *is minimizing for* αA;

iv) $H \cap K$, $H \vee K$ *and* $H + K$ *are minimizing for* A.

One verifies (iii) and (iv) directly. In view of (iii) it is permissible to assume, when convenient, that $\varrho(A) = 1$ or that $\| A \|_K = 1$, unless $A = 0$. If $A = 0$, then (ii) is trivial; otherwise let $\varrho(A) = 1$. Then K is minimizing for A if and only if $A K \subset K$. But then $G A K = G A G^{-1} (G K) \subset G K$. For the second part of (i), let $G = \varkappa I$; thereafter the first part follows immediately.

Hereafter it will be convenient to let $| x |$ and $| A |$ represent the vector and matrix whose elements are the moduli of the elements of x and of A, respectively. Also let $x \leq y$ signify for real x and y that every element of x is not greater than the corresponding element of y, and analogously for matrices, and for other signs of inequality. The columns of I will be designated e_i, and $e = \Sigma e_i$ is the vector of ones.

Lemma 3. *Let $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ be a sonsingular matrix, with vectors $g_1, g_2, \ldots, g_n$ as columns, let*

$$K = [g_1] \vee [g_2] \vee \ldots \vee [g_n],$$

which is to say that $x \in K$ in case $x = G\,y$ with $e^T \mid y \mid \leq 1$. Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K \subset K$;

ii) $e^T \mid G^{-1}\,x \mid \leq 1 \rightarrow e^T \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq 1$;

iii) $e^T \mid G^{-1}\,A\,G \mid \leq e^T$;

iv) $e^T \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq e^T \mid G^{-1}\,x \mid$ *for every* x.

If $x = G\,y$, then $x \in K$ if and only if $e^T \mid y \mid = e^T \mid G^{-1}\,x \mid \leq 1$. Hence (ii) is the analytic statement of (i). To prove (ii) $\rightarrow$ (iii), let $x = g_i$. Then $e^T \mid G^{-1}\,x \mid = e^T\,e_i = 1$, whence $e^T \mid G^{-1}\,A\,g_i \mid \leq 1$. Since this holds for every i, (iii) holds. To show (iii) $\rightarrow$ (iv), take $x = G\,y$, and observe that for any y, $e^T \mid G^{-1}\,A\,G\,y \mid \leq e^T \mid G^{-1}\,A\,G \mid \mid y \mid \leq e^T \mid y \mid$. It is obvions that (iv) implies (ii).

Corollary. *Let $G^{-1} = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ be a non-negative, nonsingular diagonal matrix; $g = G^{-1}\,e$, $g_i = G\,e_i$,*

$$K_g = [g_1] \vee \ldots \vee [g_n].$$

Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K_g \subset K_g$;

ii) $g^T \mid x \mid \leq 1 \rightarrow g^T \mid A\,x \mid \leq 1$;

iii) $g^T \mid A \mid \leq g^T$;

iv) $g^T \mid A\,x \mid \leq g^T \mid x \mid$ *for every* x.

Lemma 4. *Let $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ be a nonsingular matrix; and let*

$$K' = [g_1] + [g_2] + \ldots + [g_n],$$

which is to say that $x \in K'$ in case $x = G\,y$ with $\mid y \mid \leq e$. Then the following conditions are equivalent:

i) $A\,K' \subset K'$;

ii) $\mid G^{-1}\,x \mid \leq e \rightarrow \mid G^{-1}\,A\,x \mid \leq e$;

iii) $\mid G^{-1}\,A\,G \mid e \leq e$.

Again (ii) is the analytic statement of (i), since $x \in K'$ if and only if $\mid y \mid = \mid G^{-1}\,x \mid \leq e$. Assuming (iii), suppose $\mid G^{-1}\,x \mid \leq e$. Then

$|G^{-1}Ax| \leq |G^{-1}AG|\,|G^{-1}x| \leq |G^{-1}AG|\,e \leq e$. Now assume (ii), and let $|D| = I$, $x = GDe$. Then $|G^{-1}x| = e$, and hence $|G^{-1}AGDe| \leq e$. This holds for any choice of diagonal matrix D with diagonal elements of unit modulus. Let $a_{i.}'$ be the ith row of $G^{-1}AG$. Then $|a_{i.}'De| \leq 1$. Choose D so that $|a_{i.}'De| = |a_{i.}'|e$. Then $|a_{i.}'|e \leq 1$. But this holds for any i, whence (iii) holds.

Corollary. *Let* $G = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ *be a non-negative, nonsingular diagonal matrix;* $g = Ge$, $g_i = Ge_i$;

$$K_g' = [g_1] + [g_2] + \ldots + [g_n].$$

Then the following conditions are equivalent:

i) $AK_g' \subset K_g'$;

ii) $|x| \leq g \rightarrow |Ax| \leq g$;

iii) $|A|g \leq g$.

Theorem 1. *Let* A *be irreducible and*

$$E = [e_1] \vee \ldots \vee [e_n].$$

Then E *is minimizing for* A *if and only if* $A = \omega D^{-1} S^T D$, *where* $S \geq 0$, $Se = e$ (S *is stochastic*), ω *is an arbitrary scalar, and* $|D| = I$.

Let $|\omega| = 1$. Then $|A| = S^T$, $e^T|A| = e^T$. Hence $AE \subset E$ by (iii) of the corollary to lemma 3. Hence $e^T DA = e^T D$, $\varrho(A) \geq 1$. Hence $\varrho(A) = 1$ and E is minimizing for A. Conversely, if E is minimizing for A, then $\varrho(A) = 1$, $AE \subset E$. Hence $e^T|A| \leq e^T$, $\varrho(|A|) \leq 1$. But $\varrho(|A|) \geq \varrho(A) = 1$, whence $\varrho(|A|) = 1$, $e^T|A| = e^T$. The result then follows from a theorem due to Wielandt [6].

Any K, as described in Lemma 3, is of the form GE, and the conditions that such a K be minimizing for A are readily inferred. An analogous remark permits extension of the next theorem.

Theorem 2. *Let* A *be irreducible, and let*

$$E' = [e_1] + \ldots + [e_n].$$

Then E' *is minimizing for* A *if and only if* A *has the form*

$$A = \omega D^{-1} S D,$$

where S *is stochastic,* ω *is an arbitrary scalar, and* $|D| = I$.

The proof applies (iii) of the corollary to lemma 4 and the theorem of Wielandt.

If S is any sphere with center at the origin, then

$$\|A\|_S^2 = \varrho(A^*A) = \varrho(AA^*).$$

If Ω is any unitary matrix, then

$$|| \Omega^* A \Omega ||_S = || A ||_S.$$

Hence the sphere is minimizing for any normal matrix. More generally, however:

Theorem 3. *A sphere S with center at the origin is minimizing for A if and only if A is unitarily similar to a matrix the form*

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad \varrho^2(\Lambda) \geq \varrho(M^*M),$$

where Λ is diagonal.

It is sufficient to consider a unit sphere S. Then the vector norm belonging to S is the Euclidean norm. Suppose $\varrho(\Lambda) = 1$. Then $\Lambda^* \Lambda \leq I$, and if $x^* x = 1$, then

$$x^* A^* A x \leq x^* x,$$

whence $A S \subset S$ and S is minimizing. Conversely, let S be the unit sphere, and suppose $A S \subset S$. Apply a unitary transformation to A to reduce it to upper triangular form in such a way that the proper values are arranged along the diagonal in order of decreasing modulus. Let the transformed matrix be

$$B = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

where P is triangular with all diagonal elements of unit modulus. For any vector x partitioned in conformity with B, let

$$x^* x = u^* u + v^* v$$

and form

$$\begin{aligned} x^* B^* B x &= (P u + Q v)^* (P u + Q v) + v^* M^* M v \\ &= u^* P^* P u + 2 v^* Q^* P u + v^*(Q^* Q + M^* M) v \leq x^* x. \end{aligned}$$

Taking $v = 0$, $u^* u = 1$, $u^* P^* P u \leq 1$. But all diagonal elements of P are of unit modulus, whence, necessarily, $P^* P = I$, $| P | = I$. Hence for arbitrary x

$$2 v^* Q^* P u + v^*(Q^* Q + M^* M) v \leq v^* v.$$

Let $P u = \tau Q v$. Then for an arbitrary scalar τ,

$$v^*[2 \tau + 1) Q^* Q + M^* M] v \leq v^* v$$

and this can hold only if $Q = 0$. But then for any v,

$$v^* M^* M v \leq v^* v$$

which is to say that $\varrho(M^* M) \leq 1$.

Along with any norm can be associated a dual, designated by a prime, and such that for every A,

$$\| A \|' = \| A^* \|.$$

That is one takes the original norm of the conjugate transpose of the matrix, rather than of the matrix itself. Since this is clearly a norm, it is to be expected that it belongs to some convex body, and, in fact, if the original norm belongs to K, then the dual belongs to K' the polar of K. This is defined as follows: $x \in K'$ in case $Re\, u^* x \leq 1$ for every $u \in K$ [5, 3]. *Then A is minimized by K if and only if A^* is minimized by K', the polar of K.*

References

1. *T. Bonnesen* and *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper. Berlin, Julius Springer, 1934.
2. *V. N. Faddeeva*, Vyčislitel'nye metody lineĭnoĭ algebry. Moscow, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo, 1950.
3. *Alston S. Householder*, The approximate solution of matrix problems. J. Assoc. Comp. Mach. 5 (1958) 205—243.
4. *A. Kolmogoroff*, Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math. 5 (1934) 29—33.
5. *John von Neumann*, Some matrix inequalities and metrization of matrix-space. Bull. Inst. Math. Mech. Univ. Tomsk 1 (1937) 286—299.
6. *Helmut Wielandt*, Unzerlegbare, nichtnegative Matrizen. Math. Z. 52 (1950) 642—648.

Zum Problem der Überdeckung einer Kugel durch Kugeln

Von

A. Florian, Graz

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 25. November 1958)

Anläßlich eines Gespräches teilte mir Prof. *L. Fejes Tóth* das folgende Resultat von *J. Molnár* mit: Gegeben seien drei Kreisscheiben mit den Radien r_1, r_2, r_3, gesucht ist der größte Kreis, der sich von den drei Kreisen überdecken läßt. Alle Kreise werden, wie im folgenden die Kugeln, als abgeschlossen betrachtet. Damit lautet das Resultat von *Molnár*: Läßt sich mit den drei Durchmessern als Seiten ein spitzwinkliges Dreieck konstruieren, so ist der gesuchte Kreis der Umkreis dieses Dreiecks. Sonst — wenn sich also aus den drei Durchmessern kein Dreieck oder nur ein stumpfwinkliges bilden läßt — ist der größte überdeckbare Kreis der größte der drei. Dabei ist noch bemerkenswert: Überdecken drei Kreise den Umfang eines größeren Kreises, so überdecken sie auch das Innere[1].

Prof. *Fejes Tóth* legte mir die Frage nach dem analogen Problem im dreidimensionalen Raum vor. Da man mit drei Kugeln höchstens die größte der drei überdecken kann, lautet das Problem: Wie groß ist die größte Kugel, die man mit vier Kugeln K_i $(i=1, 2, 3, 4)$ der Radien r_i überdecken kann?

Die vollständige Lösung scheint recht schwierig zu sein. Hier sollen einige Teilresultate in dieser Richtung angegeben werden. Wir betrachten die größte Kugel, deren Oberfläche sich von den vier Kugeln überdecken läßt, und zeigen einige ihrer geometrischen Eigenschaften. Speziell wird folgen, daß sie gleichzeitig die größte Kugel ist, die sich von den Kugeln K_i vollständig überdecken läßt. Ihr Radius r hängt noch von

[1] Auf der Kugel gilt dies nicht mehr: Drei Kalotten, die den Rand einer größeren Kalotte überdecken, brauchen nicht deren Inneres zu überdecken.

zwei geeignet zu wählenden Variablen ab. Die vollständige Lösung des Problems würde die Bestimmung des Maximus dieser Funktion erfordern.

Es sei K die größte Kugel (Radius r), deren Oberfläche von den vier Kugeln K_i (Radien r_i) überdeckt werden kann. Offenbar ist $r \geqq \operatorname{Max}\{r_i\}$; wir nehmen

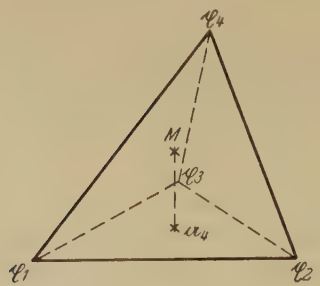
$$r > \operatorname{Max}\{r_i\}$$

an. Die Kugeln K_i schneiden von K vier Kalotten ab, die zusammen die Oberfläche von K überdecken. Die Basisebenen dieser Kalotten schließen ein Tetraeder T ein, das den Mittelpunkt M von K im Inneren enthält und selbst in K enthalten ist. Umgekehrt gibt es zu jedem solchen Tetraeder eine Überdeckung der Oberfläche von K durch vier Kugeln. Wir zeigen einige geometrische Eigenschaften von T für die größte Kugel K.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Mittelpunkt M, $\mathfrak{x}_i$ seien die Eckpunkte von T, $\mathfrak{a}_i$ die Fußpunkte der Normalen von M auf die Tetraederflächen, $\mathfrak{a}_4$ liegt in der Ebene $\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3$ (Punkte und ihre Ortsvektoren werden mit den gleichen Buchstaben bezeichnet). Damit lauten die Bedingungen für das Tetraeder T

$$\left.\begin{array}{l} |\,\mathfrak{x}_i\,| \leqq r, \\ \sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} \leqq r_i < r, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \\ M \text{ liegt im Innern von } T. \end{array}\right\} \tag{1}$$

r ist die größte Zahl, mit der diese Bedingungen gleichzeitig erfüllbar sind. (ij) sei die Verbindungsgerade von $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j$, (ijk) die Ebene durch $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_k$.



1. Es gilt $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} = r_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, d. h. $\mathfrak{a}_i$ ist Mittelpunkt von K_i. K schneidet also die Kugeln K_i in Hauptkreisen.

Beweis:

a) Wäre $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} < r_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$, so könnte man r bei festen $\mathfrak{x}_i$ so vergrößern, daß (1) gültig bleibt, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von r.

b) Es sei etwa $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_1^2} = r_1$, aber $\sqrt{r^2 - \mathfrak{a}_i^2} < r_i$ $(i = 2, 3, 4)$. Hält man $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ fest, so kann man $|\,\mathfrak{a}_1\,|$ durch geeignete Verschiebung von $\mathfrak{x}_4$ vergrößern, wenn $\mathfrak{a}_1$ nicht auf (23) liegt. In diesem Fall hätte man

$\mathfrak{x}_2$ oder $\mathfrak{x}_3$ statt $\mathfrak{x}_4$ zu nehmen und die anderen Punkte festzuhalten. In mindestens einem Fall käme man damit auf a) zurück.

c) Es sei $\sqrt{r^2 - a_1^2} = r_1$, $\sqrt{r^2 - a_2^2} = r_2$, $\sqrt{r^2 - a_i^2} < r_i$ $(i = 3, 4)$. Hält man $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ fest, so kann man $|\, a_2 \,|$ bei konstantem $|\, a_1 \,|$ durch Verschieben von $\mathfrak{x}_1$ vergrößern, außer es liegt a_2 auf (34). In diesem Fall vertauscht man $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, wobei nun $|\, a_2 \,|$ fest bleibt und $|\, a_1 \,|$ vergrößert wird. Das ergibt wieder b). a_1 und a_2 können nicht gleichzeitig auf (34) liegen, da sonst (134) und (234) zusammenfallen würden.

d) Es sei $\sqrt{r^2 - a_i^2} = r_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\sqrt{r^2 - a_4^2} < r_4$. Liegt a_3 nicht auf (14), so hält man $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ fest und verschiebt $\mathfrak{x}_2$ in (234). Dabei bleiben $|\, a_1 \,|$ und $|\, a_2 \,|$ konstant, während bei geeigneter Verschiebung $|\, a_3 \,|$ zunimmt. Liegt a_3 auf (14), so vertauscht man die Rollen von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$. Liegt a_3 auf (14) und (24), so ist $a_3 = \mathfrak{x}_4$, also $|\, \mathfrak{x}_4 \,| < r$. Dann hält man $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ fest und verschiebt $\mathfrak{x}_4$ auf (34), wodurch man $|\, a_3 \,|$ vergrößern kann, während $|\, a_1 \,|$ und $|\, a_2 \,|$ konstant bleiben. Dies würde wieder auf c) führen. Damit ist die Behauptung gezeigt.

2. Die Eckpunkte von T liegen auf der Oberfläche von K. Die Seitenflächen des Tetraeders haben also die Umkreisradien r_i.

Beweis: Wäre etwa $|\, \mathfrak{x}_1 \,| < r$, so könnte man $|\, a_4 \,|$ bei konstanten $|\, a_1 \,|$, $|\, a_2 \,|$, $|\, a_3 \,|$ vergrößern, wenn a_4 nicht auf (23) liegt, indem man $\mathfrak{x}_1$ auf (14) verschiebt. Liegt a_4 auf (23), so vertauscht man $\mathfrak{x}_3$ oder $\mathfrak{x}_2$ mit $\mathfrak{x}_4$. Damit käme man auf d) in 1. zurück. Der Fall, daß gleichzeitig a_4 auf (23), a_2 auf (34) und a_3 auf (24) liegen, kann nicht eintreten. Denn dann wäre (234) die Ebene durch die Punkte a_2, a_3, a_4. M und $\mathfrak{x}_1$ sollen nun festgehalten und $\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1$ so in drei paarweise orthogonale Vektoren übergeführt werden, daß M stets in dem dadurch bestimmten Winkelraum bleibt. Dann liegt M offenbar außerhalb des Tetraeders, das von den durch die drei Vektoren aufgespannten Ebenen und durch jene Ebene begrenzt wird, die die Fußpunkte der Normalen von M auf die drei anderen Ebenen enthält. Da M vorher innerhalb T gelegen war, müßte in einer Zwischenstellung M in der Ebene der Fußpunkte der Normalen von M auf die drei anderen Tetraederebenen liegen. Die erste Ebene würde dann auf den drei anderen senkrecht stehen, was unmöglich ist.

3. Die Kugeln K_i überdecken auch das Innere von K.

Beweis: Es sei P ein Punkt außerhalb K_i. Man lege durch P und den Mittelpunkt von K_i eine Ebene normal auf die zugehörige Tetraederfläche. Die Schnittgerade der beiden Ebenen schneidet den

Umkreis des Dreiecks in zwei Punkten. Die (parallelen) Tangenten in diesen Punkten an den Umkreis bestimmen mit P zwei Ebenen, die aus der Einheitskugel um P ein Zweieck mit einem Winkel kleiner als $\pi/2$ ausschneiden, da P außerhalb K_i liegt. Daher ist sein Inhalt kleiner als π. Um so mehr ist der räumliche Winkel, unter dem die Tetraederfläche von P aus gesehen wird, kleiner als π. Wendet man dies auf alle vier Kugeln K_i an, so folgt, daß sie zusammen das Tetraeder T überdecken. Denn würde ein innerer Punkt P von T keiner Kugel K_i angehören, so wäre die Summe der räumlichen Winkel der Tetraederflächen aus P kleiner als 4π; das ergibt einen Widerspruch. Somit überdecken die K_i zusammeu auch das Innere von K.

Daraus folgt, daß, die größte Kugel, deren Oberfläche von den vier Kugeln K_i überdeckt werden kann, gleichzeitig die größte Kugel ist, die man mit den K_i vollständig überdecken kann.

4. Die Punkte $\mathfrak{a}_i$ liegen innerhalb oder am Rande der entsprechenden Tetraederflächen.

Läge etwa $\mathfrak{a}_1$ außerhalb des Dreiecks $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$, so gäbe es eine Seite des Dreiecks, etwa (34), die $\mathfrak{a}_1$ vom gegenüberliegenden Eckpunkt $\mathfrak{x}_2$ trennt. Verschiebt man $\mathfrak{x}_2$ auf (21) gegen $\mathfrak{x}_1$, so bleiben $|\mathfrak{a}_2|$, $|\mathfrak{a}_3|$, $|\mathfrak{a}_4|$ konstant, während $|\mathfrak{a}_1|$ zunimmt. Das würde auf d) in 1. führen.

Aus 1. bis 4. folgt: Es gibt dann und nur dann eine Kugel K, die größer als die größte der K_i ist und von den K_i überdeckt werden kann, wenn es ein Tetraeder gibt, das seinen Umkugelmittelpunkt im Inneren enthält und dessen Seitenflächen die Umkreisradien r_i besitzen. Der gesuchte größte Kugelradius ist gleich dem größten Umkugelradius der Tetraeder mit dieser Eigenschaft. Dabei kann man sich auf Tetraeder beschränken, die die Fußpunkteigenschaft 4 besitzen. Da ein Tetraeder durch sechs Größen, etwa seine sechs Kanten, eindeutig bestimmt ist, jedoch nur die vier Umkreisradien der Seitenflächen vorgeschrieben sind, hängt der Umkugelradius r noch von zwei geeignet zu wählenden Variablen ab. Damit ist die Lösung des Problems auf die Ermittlung des Maximums dieser Funktion zurückgeführt.

Ist die größte überdeckbare Kugel größer als die größte der K_i, so ist sie auch die größte Kugel, deren Oberfläche sich von vier Kalotten mit den Basisradien r_i überdecken läßt. Ist $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$, so ist daher das Problem äquivalent mit dem der Überdeckung einer Kugel durch vier kongruente Kalotten bei minimaler Überdeckungsdichte. In diesem Fall müssen die Mittelpunkte der Kalotten in den Ecken

eines regulären Tetraeders liegen[2]. Daher ist die größte überdeckbare Kugel die Umkugel des regulären Tetraeders mit den Umkreisradien r_1 der Seitenflächen.

[2] *L. Fejes Tóth*, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953, S. 114.

Boundedness of Solutions of a Linear Equation

By

W. R. Utz (University of Missouri)

(Received Dezember 15, 1958)

The well-known Euler equation

$$t^2 x'' + atx' + bx = 0, \tag{1}$$

where a, b are real constants, $t > 0$ and $x' = dx/dt$, becomes the equation

$$x'' + (a-1)\, x' + bx = 0, \quad x' = dx/dz, \tag{2}$$

upon setting $z = ln\, t$. It is easily seen that a solution of (1) is bounded as $t \to \infty$ when, and only when, the corresponding solution of (2) is bounded as $t \to \infty$.

In this note we consider the boundedness of solutions, as $t \to \infty$, of the equation

$$x'' + \frac{a}{t} x' + q(t)\, x = 0, \; t > 0, \tag{3}$$

for certain choices of $q(t)$ and the real constant a.

Although equation (3) is generally not integrable in closed form it includes some interesting equations, besides the Euler equation, which can be solved in closed form. For example, the equation

$$t^2 x'' + 2\, atx' + (a(a-1) + t^2)\, x = 0 \tag{4}$$

is reduced by the transformation

$$x = v\, t^{-a}, \; t > 0,$$

to an equation easily integrated. Equation (4), for $a = 1$, has been considered by De Castro Brzezicki [2] and for $a = 1/2$ is a Bessel equation.

Theorem 1. *If* $0 \leq a \leq 2$ *and if for all large* t,

$$q'(t) \leq 0$$

and

$$t^a\, q(t) > \delta > 0$$

then each solution of (3) *valid for all large t is bounded as* $t \to \infty$.

Proof. Let $t = t_0 > 0$ be sufficiently large to satisfy the hypotheses of the theorem. Let

$$x = v\, t^{-a/2}$$

then (3) becomes

$$v'' + H(t)\, v = 0 \tag{5}$$

where

$$H(t) = q(t) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{2a - a^2}{4}\right). \tag{6}$$

Multiply (5) by v' and integrate by parts to secure

$$v'^2 + H(t)\, v^2 - \int_{t_0}^{t} v^2\, H'(t)\, dt = c_1. \tag{7}$$

Since $q'(t) \leq 0$ and $0 \leq a \leq 2$, we have $H'(t) \leq 0$ and since $t^a\, q(t) > \delta > 0$ for $t \geq t_0$ implies $q(t) > 0$ it follows that $H(t) > 0$ for $t \geq t_0$ and $0 \leq a \leq 2$. Thus each term of the left hand side of (7) is non-negative and $H(t)\, v^2$ must be bounded as $t \to \infty$. However, $H(t)\, v^2 = H(t)\, t^a\, t^2$ and since $t^a\, q(t) > \delta > 0$ and $0 \leq a \leq 2$ it follows that $H(t)\, t^a > \delta > 0$. Hence x is bounded as $t \to \infty$. This completes the proof of the theorem.

The following lemmas are useful in the proof of Theorem 2.

Lemma 1. *If all solutions of the equation*

$$x'' + a(t)\, x = 0$$

are bounded as $t \to \infty$, *then all solutions of*

$$x'' + (a(t) + b(t))\, x = 0$$

are bounded as $t \to \infty$ *if*

$$\int^{\infty} |\, b(t)\, |\, dt < \infty.$$

Lemma 2. *If* $a'(t) \geq 0$ *for all* $t \geq t_0$ *and if* $a(t) > 0$ *for some value of* $t \geq t_0$, *then any solution of*

$$u'' + a(t)\, u = 0$$

valid for all large t is bounded as $t \to \infty$.

Lemma 1 is well-known [1, p. 112]. Lemma 2 is easily proved following the proof found in [1, p. 113] for a weaker result.

Theorem 2. *If* $x = x(t)$ *is a solution of* (3) *valid for all large t and if in* (3), $a \geq 0$, $q'(t) \geq 0$ *for all* $t \geq t_0$ *and* $q(t) > 0$ *for some value of* $t \geq t_0$, *then* $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Proof. We secure equations (5) and (6) as in the proof of Theorem 1. Since by Lemma 2 the solutions of the equation

$$x'' + q(t)\, x = 0$$

are bounded, the boundedness of the solutions of (5) follow from Lemma 1. However, if v is bounded and $a \geq 0$ then

$$\lim_{t \to \infty} x = \lim_{t \to \infty} v\, t^{-a/2} = 0$$

and the theorem is proved.

With no extra effort one may secure Theorem 2 for the equation

$$x'' + \frac{a}{t^b}\, x' + q(t)\, x = 0$$

where a ≥ 0, $1 \geq b > 1/2$, $q'(t) \geq 0$ and $q(t) > 0$ for large t.

References

1. *Bellman, Richard.* Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953.
2. *De Castro Brzezicki, A.* "Estudio y resolucion de la ecuacion diferencial $xy'' + ny' + axy = 0$," Gaceta Mat., Tomo 3 (1951) pp. 153—155.

Die Verteilung von gewissen reellen Wurzeln der Gleichung n-ten Grades mit reellen Zufallskoeffizienten

Von

Karl-Walter Gaede, München

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 23. Dezember 1958)

Werden die Koeffizienten einer Gleichung n-ten Grades

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \qquad (1)$$

nicht als fest vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen betrachtet, sondern als Zufallsgrößen, so sind die Lösungen von (1) nicht mehr wohlbestimmte Zahlen sondern wieder Zufallsgrößen.

Es stellt sich nun das Problem, bei vorgegebener Verteilung der A_ν die Verteilung der Wurzeln von (1) zu bestimmen.

Hierzu liegen bisher nur Ergebnisse vor für den Fall, daß $A_0 = 1$ *eine Konstante* ist, ferner *alle* n Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Zufallsgrößen sind und

Fall a) alle reell sind und die gemeinsame n-dimensionale Verteilungsdichte $g(a_1, \ldots, a_n)$

Fall b) die Form $A_\nu = S_\nu + i\, T_\nu$ haben, wobei die S_ν, T_ν die gemeinsame $2n$-dimensionale Verteilungsdichte $h(s_1, t_1, \ldots, s_n, t_n)$ besitzen.

Für Fall a) bestimmt *J. W. Hamblen* [4][1] die gemeinsame Dichte der Wurzeln bei quadratischen Gleichungen und daraus die Randdichten der einzelnen Wurzeln, und zwar für beliebige Dichte der Koeffizienten. *Finzel* [3] betrachtet die Gleichung n-ten Grades und beschränkt sich hierbei auf konstante Dichte der Koeffizienten. Verfasser behandelt in [5] die Gleichung n-ten Grades mit beliebiger Verteilungsdichte der Koeffizienten und untersucht genauer die Gleichung dritten Grades in der Form (1) sowie in der Form $x^3 + A_2 x + A_3 = 0$. Weiterhin wird

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

für Fall b) in [5] die gemeinsame Dichte der Wurzeln von (1) allgemein (Grad und Koeffizientendichte beliebig) berechnet.

M. A. Girshick [1] beschränkt sich hier auf eine gewisse Normalverteilung und *W. Specht* [2] auf eine konstante Dichte der Koeffizienten.

Im Folgenden setzen wir voraus, daß die A_ν ($\nu=0, 1, \ldots, n$) reell sind, verlangen aber nicht mehr, daß *alle* A_ν ($\nu=1, 2, \ldots, n$) Zufallsgrößen sind, lassen aber zu, daß auch A_0 Zufallsgröße ist.

(Unter diesen Voraussetzungen versagen die in den angeführten Arbeiten entwickelten Methoden.)

1. Gegeben sei also die Gleichung n-ten Grades (1).

Von den $n+1$ Koeffizienten seien die m Koeffizienten

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2}, \ldots, A_{\nu_m}$$

mit

$$0 \leq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m \leq n;\ 1 \leq m \leq n+1$$

Zufallsgrößen mit der gemeinsamen Verteilungsdichte $g(a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \ldots, a_{\nu_m})$; die übrigen $n+1-m$ Koeffizienten seien (reelle) Konstanten.

Besonders aufschlußreich ist die Randverteilung einer reellen Wurzel von (1), *wenn bekannt ist, daß in einem Intervall der reellen Achse nur diese eine Wurzel liegen kann*; dann gibt nämlich die Verteilung der Wurzel das gesamte Lösungsverhalten der Gleichung in diesem Intervall wieder.

Wir geben deshalb eine Methode an, nach der die Verteilungsfunktion einer solchen reellen Wurzel berechnet werden kann, ohne daß es nötig ist, zuerst die gemeinsame Verteilungsdichte aller n Wurzeln zu berechnen.

Wir deuten die a_{ν_μ} als Koordinaten in einem *m-dimensionalen* euklidischen Raum, den wir als Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^*$ bezeichnen. (Die konstanten Koeffizienten gehören also nicht diesem Koeffizientenraum an.)

Setzen wir in (1) für x eine feste reelle Zahl ξ ein, so wird dadurch zwischen den Zufallskoeffizienten A_{ν_μ} eine lineare Beziehung hergestellt, d. h. alle die Punkte im Koeffizientenraum $\mathfrak{R}^*$, zu denen Gleichungen mit einer reellen Wurzel ξ gehören, erfüllen eine Hyperebene $E(\xi)$ in $\mathfrak{R}^*$, und wandert ξ in dem Intervall I ($\alpha \leq \xi \leq \beta$), so entspricht dem in $\mathfrak{R}^*$ eine (einparametrige) Hyperebenenschar $\mathfrak{E}$ (I).

Ist nun die Koeffizientenverteilungsdichte g in einem Bereich $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{R}^*$ von Null verschieden und außerhalb $\mathfrak{L}$ identisch Null, so kann

der Fall eintreten, daß jeder Koeffizientenpunkt des interessierenden Bereiches $\mathfrak{L}$ in genau einer Hyperebene einer zu einem gewissen Intervall I gehörigen Hyperebenenschar $\mathfrak{E}(I)$ gelegen ist und jede Hyperebene der Schar $\mathfrak{E}(I)$ mindestens einen Punkt mit $\mathfrak{L}$ gemeinsam hat. I ist festgelegt durch $\mathfrak{L}$ und durch Vorgabe eines Innenpunktes ξ_1 von $\mathfrak{L}$.

Um zu kennzeichnen, daß das Intervall durch ξ_1 festgelegt wurde, nennen wir es $I_1(\xi_1)$. (Die Vorgabe von ξ_1 ist nötig, weil zu einem $\mathfrak{L}$ mehrere Intervalle I gehören können, von denen jedes durch Angabe eines seiner Punkte ξ_ν fesgelegt werden kann.)

In diesem Intervall $I_1(\xi)$ kann demnach nur genau eine Wurzel jeder der zu $\mathfrak{L}$ gehörigen Gleichungen liegen. Wir bezeichnen sie mit X_1 und bestimmen die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ von X_1.

Jede Ebene $E(\xi)$ der Schar $\mathfrak{E}(I_1)$ zerlegt den Definitionsbereich $\mathfrak{R}$ der Koeffizientenverteilungsdichte g so in zwei Klassen $\mathfrak{R}(\xi)$ und $\overline{\mathfrak{R}}(\xi)$ von Punkten (wobei wir die Ebene $E(\xi)$ als zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörig betrachten), daß für alle zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörigen Gleichungen $X_1 \leq \xi$ gilt, entsprechend gilt für die zu $\mathfrak{R}(\xi)$ gehörenden Gleichungen $X_1 > \xi$.

Nun ist die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ gegeben als $\Phi_1(x_1) = w(X_1 \leq x_1)$, womit wir finden

$$\Phi_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < \text{linker Endpunkt von } I_1 \\ \int \dots \int\limits_{\mathfrak{R}(x_1)} g((a_{\nu_\mu}))\, da_{\nu_1} \dots da_{\nu_m} & \text{für } x_1 \in I_1 \\ 1 & \text{für } x_1 > \text{rechter Endpunkt von } I_1. \end{cases} \tag{2}$$

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen die Voraussetzungen erfüllt sind, die zur Rechenvorschrift (2) führten.

Diese Frage wird z. B. durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz:

Gegeben sei eine Gleichung n-ten Grades

$$f(x) \equiv A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = 0$$

von der m Koeffizienten

$$A_{\nu_1}, A_{\nu_2} \dots A_{\nu_m}\ (0 \leq \nu_1 < \nu_2 \dots < \nu_m \leq n;\ 1 \leq m \leq n+1)$$

Zufallsgrößen sind mit der gemeinsamen Verteilungsdichte $g(a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m})$, die in einem konvexen Bereich $\mathfrak{L}$ des m-dimensionalen Koeffizientenraumes stets größer Null ist, während sie außerhalb $\mathfrak{L}$ identisch verschwindet.

Durch die Ebene $f(x_1) = 0$ werde $\mathfrak{L}$ in zwei Bereiche $\mathfrak{R}(x_1)$ und $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ zerlegt, so daß

$$F(x_1) = \int \dots \int_{\mathfrak{R}(x_1)} g(a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m})\, da_{\nu_1} \dots da_{\nu_m}$$

eine monoton wachsende Funktion ist. Gibt es nun zwei Zahlen $\alpha_1 < \beta_1$, so daß $F(\alpha_1) = 0$ und $F(\beta_1) = 1$ wird, wobei der Durchschnitt der Hyperebenen $f(\alpha_1) = 0$ und $f(\beta_1) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht leer ist und hat ferner der Durchschnitt der Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ für $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ mit $\mathfrak{L}$ keinen Punkt gemeinsam, so heißt die Verteilungsfunktion $\Phi_1(x_1)$ der (einzigen) in I_1 gelegenen reellen Zufallswurzel X_1

$$\Phi_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 < \alpha_1 \\ F(x_1) & \text{für} \quad I_1\{\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1\} \\ 1 & \text{für} \quad x_1 > \beta_1 \end{cases}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung gibt es eine Hyperebene $f(x_1) = 0$, die $\mathfrak{L}$ in zwei Teilbereiche mit positivem m-dimensionalen Inhalt zerlegt. Aus der Bedingung $F(x_1) = \int \dots \int_{\mathfrak{R}(x_1)} g\, da_{\nu_1} \dots da_{\nu_m}$ monoton wachsend, läßt sich entscheiden, welcher dieser beiden Bereiche $\mathfrak{R}(x_1)$ ist.

Wegen der Stetigkeit der Abhängigkeit der Ebenen $f(x) = 0$ vom Scharparameter x, hat für genügend kleines $h(0 < h < \varepsilon_1)$ die Ebene $f(x_1 + h) = 0$ auch noch die Eigenschaft, $\mathfrak{L}$ in zwei nichtleere Teilbereiche zu zerlegen. Da die Koeffizientendichte in $\mathfrak{L}$ stets positiv ist, kann der Durchschnitt von $f(x_1 + h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht ganz in $\mathfrak{R}(x_1)$ liegen, weil sonst $F(x_1 + h) < F(x_1)$ wäre, was ein Widerspruch gegen das monotone Wachsen von $F(x_1)$ ist.

Weiterhin sind die Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ nicht identisch, denn aus der Identität würde folgen (mit $x_2 = x_1 + h$)

$$x_1^{n-\nu_1} : x_1^{n-\nu_2} : \dots : x_1^{n-\nu_m} : f(x_1) - \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu_\mu} x^{n-\nu_\mu}$$

$$= x_2^{n-\nu_1} : x_2^{n-\nu_2} : \dots : x_2^{n-\nu_m} : f(x_2) - \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu_\mu} x_2^{n-\nu_\mu}$$

Faßt man diese Gleichung bei vorgegebenem x_1 als Bestimmungsgleichung für x_2 auf, so hat sie neben der trivialen Lösung $x_2 = x_1$ sicher nur endlich viele Lösungen. Wenn also h nur klein genug ist $(0 < h < \varepsilon_2)$, ist $x_2 = x_1 + h$ nicht Lösung obiger Gleichung, d. h. die Hyperebenen $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ nicht identisch; selbstverständlich fallen dann auch die Hyperebenen $f(x_1 + \vartheta h) = 0$, $(0 < \vartheta < 1)$ mit $f(x_1) = 0$ nicht zusammen.

Der Monotonie von $F(x)$ würde es noch nicht widersprechen, wenn ein Teil von $f(x_1 + h) = 0$ in $\mathfrak{R}(x_1)$ läge, ein anderer in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$.

Dann wäre aber wegen der Konvexität von $\mathfrak{L}$ der Durchschnitt des Schnittgebildes von $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht leer, (wir sagen kurz: $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ schneiden sich in $\mathfrak{L}$). Wegen der Monotonie von $F(x)$ kann der Durchschnitt von $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ nicht ganz in $\mathfrak{R}(x_1)$ oder in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1 + h)$ gelegen sein, folglich müßten sich (wieder wegen der Konvexität von $\mathfrak{L}$) entweder $f(x_1) = 0$ und $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ oder $f(x_1 + \vartheta h) = 0$ und $f(x_1 + h) = 0$ $(0 < \vartheta < 1)$ in $\mathfrak{L}$ schneiden. In dieser Schlußweise fortfahrend, fänden wir zwei Ebenen $f(\tilde{x}_1) = 0$ und $f(\tilde{x}_1 + \varepsilon) = 0$ $(x_1 \leq \tilde{x}_1 \leq x_1 + h;\ \varepsilon > 0)$ bei beliebig kleinem ε, die sich in $\mathfrak{L}$ schnitten. In $\mathfrak{L}$ lägen also Koeffizientenpunkte, zu denen Gleichungen mit den Wurzeln $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_1 + \varepsilon$ gehörten bei beliebig wenig von Null verschiedenem ε, d. h. im Intervall $x_1 \ldots x_1 + h$ läge eine Doppelwurzel und es verschwänden für ein x in diesem Intervall $f(x)$ und $f'(x)$ gleichzeitig, was aber nach Voraussetzung nicht eintreten darf.

Damit ist nun gezeigt, daß der Durchschnitt von $f(x_1 + h) = 0$ $(0 < h < \text{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ mit $\mathfrak{L}$ ganz in $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ gelegen ist.

Da nach Voraussetzung für ein gewisses Intervall $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ $F(x_1)$ mit wachsendem x_1 von 0 bis 1 wachsen soll, ist durch wiederholte Anwendung unseres Schlusses bewiesen, daß durch jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ genau eine Ebene der Schar $f(x) = 0$ für $x_1 < x \leq \beta_1$ geht und jede Ebene dieser Schar $\overline{\mathfrak{R}}(x_1)$ schneidet.

Setzen wir nun $h = -h_1$ $(h_1 > 0)$, so lassen sich hierfür alle unsere Schlüsse in zum Fall $h > 0$ analoger Weise wiederholen, womit die einfache Überdeckung von $\mathfrak{R}(x_1)$ durch die Ebenen der Schar $f(x) = 0$ für $\alpha_1 \leq x \leq x_1$ bewiesen ist. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, unter denen (2) gilt, und unser Satz ist bewiesen.

Bemerkungen:

a) Aus unserem Beweis folgt, daß $F(x_1)$ *stark* monoton wachsend ist.

b) Ist die Koeffizientendichte $g(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m})$ zentralsymmetrisch in bezug auf den Punkt $M_0 : (a_{\nu_1}^{(0)}\, a_{\nu_2}^{(0)}, \ldots, a_{\nu_m}^{(0)})$, so hängt $F(x_1)$ nur von dem Abstand $d(x_1 \mid M_0)$ der Hyperebene $f(x_1) = 0$ von M_0 ab; es gilt also $F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0))$, wobei $F(d)$ eine stark monoton wachsende Funktion ist. Der Abstand $d(x_1 \mid M_0)$ ist gemäß der Hesseschen Normalform der Hyperebene $f(x_1) = 0$ gegeben durch

$d(x_1 \mid M_0) = \dfrac{f_0(x_1)}{\sqrt{\sum_{\mu=1}^{m} x^{2(n-\nu_\mu)}}}$, wobei $f_0(x_1)$ aus $f(x_1)$ dadurch entsteht, daß die A_{ν_μ} durch $a_{\nu_\mu}^{(0)}$ ersetzt werden. Das Vorzeichen werde so gewählt, daß $d(x_1 \mid M_0)$ für wachsendes x_1 nicht abnimmt.

Die Ebene durch den Punkt M_0 entspricht dem Parameterwert x_0, wobei x_0 die (einzige) im Intervall $\alpha_1 \ldots \beta_1$ gelegene Nullstelle von $f_0(x) = 0$ ist.

Wegen der Symmetrie der Koeffizientendichte ist x_0 also die Mediane der Verteilung von X_1.

c) Der Definitionsbereich $\mathfrak{L}$ der Koeffizientendichte muß nicht notwendig beschränkt sein.

d) Eine hinreichende Bedingung dafür, daß für $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ das Schnittgebilde von $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ mit $\mathfrak{L}$ keinen Punkt gemeinsam hat, erhält man auf folgende Art: Existiert für jedes x_1 mit $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$ eine Ebene $l(x_1) \equiv \varkappa(x_1) f(x_1) + \lambda(x_1) f'(x_1) = 0$ (mit nicht gleichzeitig verschwindenden sonst aber beliebigen Funktionen $\varkappa(x_1)$ und $\lambda(x_1)$), deren Durchschnitt mit $\mathfrak{L}$ leer ist, so schneiden sich $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ sicher nicht in $\mathfrak{L}$.

2. *Beispiel*:

Gegeben sei die Zufallsgleichung

$$f(x) \equiv A_0 x^5 + A_1 x^4 + A_2 x^3 - 3 = 0$$

deren Zufallskoeffizienten A_0, A_1, A_2 die gemeinsame Verteilungsdichte:

$$g(a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} C \exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}\left((a_0 - 2)^2 + a_1^2 + a_2^2\right)\right] \\ \qquad \text{für } \mathfrak{L}: (a_0 - 2)^2 + a_1^2 + a_2^2 \leq 1{,}44^2 \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\sigma > 0$ und $C^{-1} = 2\sqrt{2\pi^3}\,\sigma^3 \left\{ \left(H\left(\dfrac{1{,}44}{\sigma}\right) - \tfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1{,}44}{\sigma}\, h\left(\dfrac{1{,}44}{\sigma}\right) \right\}$

haben, wobei

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2} x^2\right) \qquad -\infty \ldots x \ldots \infty$$

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\, dt \qquad -\infty \ldots x \ldots \infty$$

ist.

Die Koeffizientenverteilung ist zentralsymmetrisch mit dem Zentrum

$$M_0 : A_0 = 2,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0.$$

Die Gleichung $f_0(x) = 0$, also $2x^5 - 3 = 0$ hat die reelle Wurzel $x_0 = \sqrt[5]{1{,}5}$ und wir wollen die Verteilung $\Phi(x_1)$ derjenigen reellen Wurzel X_1 bestimmen, die in einem Intervall variiert, das x_0 enthält.

Da der Koeffizient von X^0 konstant $\neq 0$ ist, hat keine zu $\mathfrak{L}$ gehörige Gleichung die Lösung $x = 0$, folglich ist das Variationsintervall von X_1 ganz in der positiven reellen Achse gelegen.

Nach Bemerkung b) ist $F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0))$ und

$$d(x_1 \mid M_0) = \frac{2x_1^5 - 3}{\sqrt{x_1^{10} + x_1^8 + x_1^6}} \tag{3}$$

Für $I\{0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}6590\}$ (auf vier Stellen genau) wächst $d(x_1 \mid M_0)$ monoton von $d = -1{,}44$ nach $d = 1{,}44$, d. h. $F(x_1) = \tilde{F}(d)$ ist in $I_1(0{,}9121 \leq x \leq 1{,}6590)$ monoton wachsend, da $\tilde{F}(d)$ stark monoton wächst.

Für $\tilde{F}(d)$ erhalten wir nach einiger Rechnung:

$$\tilde{F}(d) = \frac{H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{R}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma}) - H(-\frac{d}{\sigma}) - \frac{d}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma})}{2(H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{1}{2} - \frac{R}{\sigma}\, h(\frac{R}{\sigma}))} \quad \text{für } -R \leq d \leq R \quad R = 1{,}44 \tag{4}$$

und $\tilde{F}(d)$ wächst in diesem Intervall monoton. Demnach ist

$$F(x_1) = \tilde{F}(d(x_1 \mid M_0)) \text{ für } I\{0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}659\}, \tag{5}$$

wobei d aus (3) zu entnehmen ist.

Um zu untersuchen, ob sich für $x_1 \in I$ die Ebenen $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ in $\mathfrak{L}$ schneiden, setzen wir nach Bemerkung d)

$$\begin{aligned} l(x_1) &= f(x_1) + \lambda(x)\, f'(x_1) \\ &= A_0(x_1^5 + \lambda\, 5\, x_1^4) + A_1(x_1^4 + \lambda\, 4\, x_1^3) + A_2(x_1^3 + \lambda\, 3\, x_1^2) - 3 \end{aligned}$$

und wir beweisen, daß es zu jedem $x_1 \in I$ eine Ebene $l(x_1) = 0$ gibt, deren Abstand $\delta(x_1)$ von M_0 dem Betrag nach größer als $R = 1{,}44$ ist; d. h. $f(x_1) = 0$ und $f'(x_1) = 0$ *schneiden* sich für $x_1 \in I$ *nicht* in $\mathfrak{L}$. Es ist nämlich

$$\delta(x_1) = \frac{2(x_1^5 + \lambda\, 5\, x_1^4) - 3}{-\sqrt{(x_1^5 + 5\, x_1^4\, \lambda)^2 + (x_1^4 + 4\, x_1^3\, \lambda)^2 + (x_1^3 + 3\, x_1^2\, \lambda)^2}}.$$

Für $0 < x_1 \leq 1$ setzen wir $\lambda = -\frac{1}{5} x_1$ und erhalten $\delta(x_1) = \frac{15}{\sqrt{x_1^8 + 4\, x_1^6}}$;

da diese Funktion monoton fällt, ist für

$$0 < x_1 \leq 1 \quad \delta(x_1) \geq \delta(1) = 3 \,.\, \sqrt{5} > R$$

Für $x_1 \geq 1$ verwenden wir $\lambda = -x_1$ und bekommen

$$\delta(x_1) = \frac{8\,x_1^5 + 3}{\sqrt{16\,x_1^{10} + 9\,x_1^8 + 4\,x_1^6}} > \frac{8\,x_1^5}{\sqrt{16\,x_1^{10} + 9\,x_1^8 + 4\,x_1^6}}$$

und da letztere Funktion für $x_1 \geq 1$ monoton wächst

$$\delta(x_1) > \frac{8}{\sqrt{29}} > R = 1{,}44.$$

Damit ist auch die letzte Bedingung des Satzes erfüllt und wir erhalten nach diesem Satz unter Verwendung von (3) und (4):

Die Verteilungsfunktion $\Phi(x_1)$ der in der Umgebung von $x_0 = \sqrt[5]{1{,}5}$ gelegenen reellen Wurzel X_1 der zu Beginn dieses Abschnittes 2 gegebenen zufälligen Gleichung ist gegeben durch

$$\Phi(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 < 0{,}9121 \\ \dfrac{H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{R}{\sigma}\,h(\frac{R}{\sigma}) - H(-\frac{d}{\sigma}) - \frac{d}{\sigma}\,h(\frac{R}{\sigma})}{2(H(\frac{R}{\sigma}) - \frac{1}{2} - \frac{R}{\sigma}\,h(\frac{R}{\sigma}))} & \text{für } 0{,}9121 \leq x_1 \leq 1{,}6590 \\ 1 & \text{für } x_1 > 1{,}6590 \end{cases}$$

mit $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$, $H(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} h(t)\,dt$

$$d = \frac{2\,x_1^5 - 3}{\sqrt{x_1^{10} + x_1^8 + x_1^6}} \text{ und } R = 1{,}44.$$

Setzen wir $\dfrac{R}{\sigma} = 4$, d. h. $\sigma = 0{,}36$, so ergibt sich folgendes Bild:

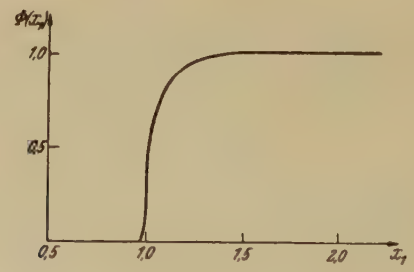


Abb. 1

Literatur

[1] *M. A. Girshick*, Note on the Distribution of Roots of a Polynomial with Random Complex Coefficients. Ann. Math. Statist. Bd. 13 (1942), S. 235—238.
[2] *W. Specht*, Untersuchungen über die Wurzelverteilung algebraischer Gleichungen. Math. Nachrichten Bd. 4 (1950/51), S. 126—149.
[3] *L. Finzel*, Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. Mathem. Nachrichten Bd. 11 (1954), S. 85—104.
[4] *W. Hamblen*, Distribution of Roots of Quadratic Equations with Random Coefficients. Ann. Math. Statist. Bd. 27 (1956), S. 1136—1143.
[5] *K. W. Gaede*, Zur Verteilung der Wurzeln zufälliger algebraischer Gleichungen (Diss. T.-H. München, 1959).

Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen (II)*

Von

Gilbert Helmberg, New Orleans

(Eingegangen am 30. Dezember 1958)

Gegeben sei eine kompakte, nicht notwendigerweise kommutative Gruppe G, die als topologischer Raum dem Trennungsaxiom T_1 genügt. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine Konstruktion einer in G gleichverteilten Folge unter Verwendung von Folgen, die in Untergruppen der Gruppe G gleichverteilt sind. Die angegebene Konstruktion beruht auf einer Verallgemeinerung der in [2] enthaltenen Ergebnisse. Wir führen hier nur die wichtigsten Bezeichnungen, Definitionen und Sätze aus dieser Arbeit nochmals an, werden im übrigen aber auf sie verweisen, wo wir an die dort enthaltenen Ergebnisse und deren Beweise anknüpfen können.

Das normierte Haarsche Maass auf G werde mit μ bezeichnet, ein vollständiges System nicht äquivalenter irreduzibler unitärer Darstellungen von G mit $\{R^{(\lambda)}: \lambda \in \Lambda)\}$, und der Grad von $R^{(\lambda)}$ mit r_λ. Hiebei soll $R^{(1)}$ die triviale Darstellung von G sein. Unter einer Untergruppe werden wir immer eine abgeschlossene Untergruppe von G verstehen, unter einer Folge immer eine Folge von Elementen der Gruppe G.

Definition [2] 1: Es sei $\{x_\nu : \nu \in \omega\}$ eine Folge in G und für eine abgeschlossene Untermenge M von G, $N(M)$ die Anzahl der Elemente in der Menge $\{x_\nu : x_\nu \in M, \nu \leqq N\}$. Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ heiße gleichverteilt in G, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \frac{N(M)}{N} = \mu(M) \qquad [2]\ (1)$$

für alle abgeschlossenen Untermengen M von G gilt, deren Rand das Haarsche Maass 0 hat.

---

* Abgefaßt mit teilweiser Unterstützung aus Mitteln der National Science Foundation, USA.

Definition [2] 3: Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ von Elementen der Untergruppe H heiße gleichverteilt in H, wenn sie in der topologischen Gruppe H mit Bezug auf die durch G in H induzierte Topologie und das normierte Haarsche Maass der kompakten Gruppe H gleichverteilt ist.

Hilfssatz [2] 1 (*Eckmann*): Die Folge $\{x_\nu : \nu \in w\}$ ist dann und nur dann gleichverteilt in G, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(x_\nu) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \lambda \neq 1. \qquad [2]\,(1')$$

Der Beweis der Gleichverteilung einer Folge in G läuft also auf eine Abschätzung einer Matrix hinaus. Hiezu verwenden wir eine Matrix-Norm, die der Matrix $A = (a_{ij})$ vom Grad r_λ die Matrix $\| A \| = (| a_{ij} |)$ zuordnet. Wir schreiben $\| A \| \leq \| B \|$ für die simultanen Ungleichungen $| a_{ij} | \leq | b_{ij} |$ $(i, j \leq r_\lambda)$. Verstehen wir unter $F^{(\lambda)}$ die Matrix des Grades r_λ, deren Koeffizienten sämtlich 1 sind, so gilt (alle Matrizen haben den Grad r_λ)

$$\| kA \| = | k | \cdot \| A \| \qquad (k \in K = \text{komplexer Zahlkörper})$$

$$\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$$

$$\| A\,B \| \leq \| A \| \cdot \| B \| \qquad [2]\,(2)$$

$$\| A \| \cdot \| B \| \leq \| C \| \cdot \| D \| \text{ wenn } \|A\| \leq \|C\| \text{ und } \| B\| \leq \| D \|$$

$$\| A \| \leq a F^{(\lambda)} \qquad \text{wenn } a \geq \max \{ | a_{ij} | : 1 \leq i, j \leq r_\lambda \}$$

$$\| R^{(\lambda)}(g) \| \leq F^{(\lambda)} \qquad \text{wenn } g \in G$$

$$(F^{(\lambda)})^m = r_\lambda^{m-1} F^{(\lambda)}.$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauscht werden darf, werden wir $\prod_{l=1}^{m} h_l$ für das Produkt $h_1 h_2 \ldots h_m$ schreiben. Weiters werden wir für

$$\sum_{j_1=\underline{j}_1}^{\bar{j}_1} \sum_{j_2=\underline{j}_2}^{\bar{j}_2} \ldots \sum_{j_m=\underline{j}_m}^{\bar{j}_m}$$

kurz $\sum_{\underline{j}_l \leq j_l \leq \bar{j}_l}$ — schreiben, wenn es klar ist, daß l von 1 bis m läuft.

Hauptergebnis der vorausgegangenen Arbeit, auf die wir uns hier beziehen, ist der folgende Satz:

Satz [2] 2: Es seien g_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ n Elemente von G derart, daß für jedes $\lambda \neq 1$ mindestens eines von ihnen in $R^{(\lambda)}$ nicht den Eigenwert 1 besitzt. Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n}(g_k)^{i_k}$ $(0 \leq i_k < \infty,$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ derart zu einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente g_ν mit $1 \leq \nu \leq (i+1)^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n}(g_k)^{i_k}$ mit $0 \leq i_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt.

Hieraus werden ähnliche, zum Teil mehr detailierte Sätze über gleichverteilte Folgen in Untergruppen, endlichen Gruppen und Abelschen Gruppen abgeleitet. Für Abelsche Gruppen ergibt sich insbesonders, daß die in Satz [2] 2 genannte Bedingung für die Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, was im nicht-kommutativen Falle im allgemeinen nicht zutrifft. Die folgenden Ausführungen zeigen, daß sich diese Sätze wesentlich verallgemeinern lassen.

Satz 1: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von Untergruppen der Gruppe G gegeben, das folgenden Bedingungen genügt:

a) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ sei eine in H_k gleichverteilte Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ gegeben;

b) für jedes $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq 1$ existiere mindestens ein Index $\bar{k}$ derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ nicht enthält.

Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k} = h_{1\nu_1} h_{2\nu_2} \ldots h_{n\nu_n}$ $(\nu_k \in w,$ $k = 1, 2, \ldots, n)$ derart zu einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente g_ν mit $1 \leq \nu \leq i^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $1 \leq \nu_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt.

Beweis: Wir schicken die Bemerkung voraus, daß die gewünschte Anordnung der Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ in folgender Weise erreicht wird: es sei $g_1 = \prod_{k=1}^{n} h_{k1}$; die nächsten $(2^n - 1)$ Elemente g_ν $(1 < \nu \leq 2^n)$ seien die in beliebiger Reihenfolge angeordneten Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $\max \nu_k = 2$, $k = 1, 2, \ldots, n$; allgemein seien die $[i^n - (i-1)^n]$ Elemente

g_ν $((i-1)^n < \nu \leq i^n)$ die in beliebiger Reihenfolge angeordneten Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $\max \nu_k = i$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Für den Beweis des Satzes 1 beziehen wir uns auf den Beweis des Satzes 2 in [2]. Wir haben zu zeigen, daß

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = 0 \qquad \text{für } \lambda \neq 1. \tag{1}$$

(Das Symbol O steht hier und auch später an entsprechenden Stellen für die Null-Matrix.) Wir wollen annehmen, daß für ein gegebenes $\lambda \neq 1$ die Untergruppe $H_{\bar{k}}$ die Bedingung b) erfüllt. Ist i die größte in $N^{1/n}$ enthaltene ganze Zahl, so erhalten wir ähnlich wie in [2] (6)

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = \frac{i^n}{N}\left[\frac{1}{i^n} \sum_{1\leq i_k\leq i} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}\right) + \frac{I}{i^n} \sum_{\nu=i^n+1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu)\right] \tag{2}$$

$$\frac{1}{i^n} \sum_{1\leq i_k\leq i} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{ki_k}\right) = \prod_{k=1}^{\bar{k}-1}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_k=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{ki_k})\right\} \cdot \frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=\bar{k}+1}^{n}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_k=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{ki_k})\right\}. \tag{3}$$

In (2) und (3) kann es vorkommen, daß je nach den Werten von N und $\bar{k}$ gewisse Summanden bzw. Faktoren nicht in Erscheinung treten. Die in geschwungenen Klammern stehenden Matrizen werden wie in [2] (8) mittels der in [2] (2) eingeführten Matrix-Norm abgeschätzt.

Untersuchen wir nun den mittleren Faktor der rechten Seite von (3). Es sei $S_{\bar{k}}^{(\lambda)}$ eine Matrix von der Eigenschaft, daß $R^{*(\lambda)} = S_{\bar{k}}^{(\lambda)^{-1}} R^{(\lambda)} S_{\bar{k}}^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, als Darstellung von $H_{\bar{k}}$ in vollständig reduzierter Gestalt erscheint und entlang der Hauptdiagonale die irreduziblen Darstellungen $R'^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ von $H_{\bar{k}}$ enthält. (T ist eine endliche Indexfolge.)

$$\frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}}) = S_{\bar{k}}^{(\lambda)}\left\{\frac{1}{i} \sum_{i_{\bar{k}}=1}^{i} R^{*(\lambda)}(h_{\bar{k}i_{\bar{k}}})\right\} S_{\bar{k}}^{(\lambda)^{-1}} \tag{4}$$

Infolge der Gleichverteilung der Folge $\{h_{\bar{k}\nu} : \nu \in w\}$ in $H_{\bar{k}}$ und der speziellen Wahl der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} \sum_{\nu=1}^{i} R'^{(\tau)}(h_{\bar{k}\nu}) = O \qquad \text{für alle } \tau \in T.$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß mit wachsendem i die Matrixnorm des

mittleren Faktors der rechten Seite in (4) und damit auch die Matrixnorm der linken Seite in (4) gegen O strebt. Ähnlich wie in [2] (9) schließen wir, daß die linke Seite in (3) für wachsendes i gegen O strebt.

Der zweite Summand der rechten Seite in (2) wird genau so abgeschätzt wie in [2] (10) und strebt für wachsendes i in Matrixnorm gegen O. Damit strebt auch die linke Seite von (2) für wachsendes N in Matrixnorm gegen O und die Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G ist bewiesen.

Satz 2: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ separabler Untergruppen von G gegeben, das der Bedingung b) des Satzes 1 genügt. Dann gilt $G = H_1 H_2 \ldots H_n$.

Beweis: H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ enthält eine abzählbare, in H_k dichte Untermenge. Diese kann, wie *E. Hlawka* ([1] 6.) gezeigt hat, zu einer in H_k gleichverteilten Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ angeordnet werden. Die mittels dieser Folgen wie in Satz 1 konstruierte Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ ist in G gleichverteilt. Die Menge aller Elementen der Form $h_{1\nu_1} h_{2\nu_2} \ldots h_{n\nu_n}$ ist daher dicht in G und im Komplex $H_1 H_2 \ldots H_n$ enthalten. Dieser Komplex bildet eine kompakte und daher abgeschlossene Untermenge von G und ist deshalb mengentheoretisch identisch mit G.

Wir bemerken, daß die Anordnung, in der die Untergruppen H_k miteinander multipliziert werden, beliebig gewählt werden kann. Das gleiche gilt für die Verwendung der Folgen $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ in Satz 1.

Satz 3: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von Untergruppen der Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und folgenden Bedingungen genügen:

a) für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ sei eine in H_k gleichverteilte Folge $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ gegeben;

b) für jedes $\lambda \in \Lambda$ existiere mindestens ein Index $\bar{k}$ derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$, beschränkt auf $H_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung der Untergruppe $H_{\bar{k}}$ genau so oft enthält, wie sie, beschränkt auf H, die triviale Darstellung der Untergruppe H enthält.

Werden die Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ $(\nu_k \in w, k = 1, 2, \ldots, n\}$ derart zu einer Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ angeordnet, daß für alle $i \in w$ die Elemente h_ν mit $1 \leq \nu \leq i^n$ gerade sämtliche Elemente $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ mit $1 \leq \nu_k \leq i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, dann ist die Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ in H gleichverteilt.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt unter Benützung von Satz 1 genau so wie der entsprechende Beweis des Satzes 3 in [2].

Satz 4: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ von separablen Untergruppen der Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und der Bedingung b) des Satzes 3 genügen. Dann gilt $H = H_1 H_2 \ldots H_n$.

Der Beweis erfolgt ähnlich wie der Beweis des Satzes 2 unter Verwendung von Satz 3.

Die angegebenen Sätze lassen sich ähnlich wie in [2] 4. auf endliche Gruppen übertragen. Es sei allgemein $o(G)$ die Ordnung der endlichen Gruppe G. Aus den Elementen einer Untergruppe H von G bilden wir eine Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$, indem wir die $o(H)$ verschiedenen Elemente von H in beliebiger Anordnung als h_ν mit $(p-1)\,o(H) < \nu \leq p\,o(H)$ $(p \in w)$ verwenden. Es läßt sich leicht zeigen, daß die erhaltene Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ im Sinne der in [2] gegebenen Definitionen 1 und 3 in H gleichverteilt ist. Als Analogon zu [2], Lemma 4, erhalten wir:

Lemma: Es seien H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ endliche Untergruppen der kompakten Gruppe G. Der Komplex $H_1 H_2 \ldots H_n$ enthält dann und nur dann jedes Element der Guppe G gleich oft, wenn die mittels der Folgen $\{h_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nach dem Satz 1 angegebenen Verfahren gebildete Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G gleichverteilt ist.

Beweis: Es sei m das kleinste gemeinsame Vielfache von $o(H_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Die Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ enthält im Indexbereich $1 \leq \nu \leq (pm)^n$ $(p \in w)$ alle Elemente der Form $\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}$ $(1 \leq \nu_k \leq pm,$ $k = 1, 2. \ldots, n)$, d. h. $\dfrac{(pm)^n}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)}$ mal die Elemente des Komplexes $H_1 H_2 \ldots H_n$. Enthält dieser jedes Element von G gleich oft, so ist G endlich, und wir haben für $\lambda \neq 1$

$$\sum_{1 \leq \nu_k \leq o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = 0$$

$$\sum_{\nu=1}^{(pm)^n} R^{(\lambda)}(g_\nu) = 0$$

Mittels derselben Abschätzung wie in [2] überzeugen wir uns davon, daß

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} R^{(\lambda)}(g_\nu) = 0 \qquad \text{für } \lambda \neq 1.$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$, daß G endlich ist. Nach dem oben gesagten gilt

$$\frac{1}{(pm)^n} \sum_{\nu=1}^{(pm)^n} R^{(\lambda)}(g_\nu) = \frac{1}{(pm)^n} \cdot \frac{(pm)^n}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)} \sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)} \cdot \sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) \qquad (p \in w).$$

Zusammen mit (1) ergibt dies

$$\sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = 0 \qquad \text{für } \lambda \neq 1$$

Auf grund der Treue eines vollständigen Systems irreduzibler Darstellungen folgt, daß der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element von G gleich oft $\left(\text{d. h. } \frac{\prod_{k=1}^{n} o(H_k)}{o(G)} \text{ mal}\right)$ enthält.

Wenden wir dieses Lemma zusammen mit Satz 1 auf eine endliche Gruppe G an, so ergibt sich:

Satz 5: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ von Untergruppen der endlichen Gruppe G gegeben, das der Bedingung b) des Satzes 1 genügt. Dann enthält der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element der Gruppe G gleich oft.

Es sei bemerkt, daß sich dieser Satz natürlich ohne Schwierigkeit auch direkt beweisen läßt, da unter der angegebenen Bedingung für $\lambda \neq 1$ ein Faktor der rechten Seite in der Identität

$$\sum_{1 \le \nu_k \le o(H_k)} R^{(\lambda)}\left(\prod_{k=1}^{n} h_{k\nu_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{\nu_k=1}^{o(H_k)} R^{(\lambda)}(h_{k\nu_k})$$

die O-Matrix ist.

Ähnlich wie Satz 3 aus Satz 1, ergibt sich aus Satz 5 der folgende:

Satz 6: Es sei ein System $\{H_k : k = 1, 2, \dots, n\}$ von Untergruppen der endlichen Gruppe G gegeben, die sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind und der Bedingung b) des Satzes 3 genügen. Dann enthält der Komplex $H_1 H_2 \dots H_n$ jedes Element der Untergruppe H gleich oft.

Als Beispiel kann die alternierende Gruppe A_5 von fünf Variablen dienen. Ihre fünf inäquivalenten irreduziblen Darstellungen haben die Grade $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$. Es sei H_1 die Diedergruppe der Ordnung 10, erzeugt von den Permutationen (12345) und (12) (34), und H_2 die alternierende Gruppe von vier Variablen, erzeugt von den Permutationen (123) und (12) (34). Bezeichnen wir mit $d^{(\lambda)}(H)$ die Anzahl der in $R^{(\lambda)}$ enthaltenen trivialen Darstellungen der Untergruppe H, dann gilt (siehe [3], Satz 2)

$$\frac{60}{o(H)} = \sum_{\lambda=1}^{5} r_\lambda d^{(\lambda)}(H).$$

Hieraus können wir ablesen, daß die triviale Darstellung von H_1 außer in $R^{(1)}$ nur in $R^{(5)}$ enthalten ist und die der Untergruppe H_2 außer in $R^{(1)}$ nur in $R^{(4)}$. Für H_1 und H_2 treffen also die Voraussetzungen des Satzes 5 (und 1) zu. In der Tat enhält der Komplex $H_1 H_2$ ebenso wie $H_2 H_1$ jedes Element der Gruppe $G = A_5$ genau zweimal.

Die angegebenen Bedingungen b) der Sätze 1 bis 6 sind im Falle einer nichtkommutativen Gruppe G hinreichend, aber nicht notwendig für die Gleichverteilung der Folgen $\{g_\nu : \nu \in w\}$ bzw. $\{h_\nu : \nu \in w\}$, wie das in [2] gegebene Beispiel zyklischer Untergruppen der alternierenden Gruppe von vier Variablen zeigt. Im Falle einer abelschen Gruppe sind die erwähnten Bedingungen jedoch auch notwendig, was genau wie im Beweis des Satzes 7 in [2] gezeigt werden kann. Diese Feststellung läßt sich in folgender Weise verallgemeinern:

Satz 7: Es sei ein System $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von Folgen gegeben, die in den Normalteilern N_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ der kompakten Gruppe G beziehungsweise gleichverteilt sind. Dann ist für die Gleichverteilung irgend einer Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G, deren Glieder endliche Produkte von Gliedern der Folgen $\{n_{k\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, notwendig, daß für jedes $\lambda \neq 1$ mindestens ein Index $\bar{k}$ existiert derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G, beschränkt auf $N_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung von $N_{\bar{k}}$ nicht enthält.

Beweis: Aus der Gleichverteilung der Folge $\{g_\nu : \nu \in w\}$ in G folgt, daß die Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Normalteiler N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ in G dicht ist. Infolge der Vertauschbarkeit der Normalteiler untereinander ergibt sich $G = N_1 N_2 \ldots N_n$. Enthält $R^{(\lambda)}$ die triviale Darstellung des Normalteilers N von G, so enthält sie diese r_λ mal, d. h. keine andere irreduzible Darstellung von N (siehe [3], Satz 3).

Wäre für ein bestimmtes $\lambda \neq 1$ die Bedingung des Satzes 7 nicht erfüllt, dann würde in $R^{(\lambda)}$ jedes Element jedes Normalteilers N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ durch die Einheitsmatrix dargestellt. Das gleiche gelte damit auch für jedes Element von von G, d. h. $R^{(\lambda)}$ wäre die triviale Darstellung, was einen Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \neq 1$ ergibt.

Satz 8: Es sei ein System $\{n_{k_\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ von Folgen gegeben, die in den Normalteilern N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ der kompakten Gruppe G beziehungsweise gleichverteilt sind, welche ihrerseits sämtlich in einer einzigen Untergruppe H von G enthalten sind. Dann ist für die Gleichverteilung irgend einer Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ in H, deren Glieder endliche Produkte von Gliedern der Folgen $\{n_{k_\nu} : \nu \in w\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sind, notwendig, daß für jedes $\lambda \in \Lambda$ mindestens ein Index $\bar{k}$ existiert derart, daß die irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G, beschränkt auf $N_{\bar{k}}$, die triviale Darstellung des Normalteilers $N_{\bar{k}}$ genau so oft enthält, wie sie, beschränkt auf H, die triviale Darstellung der Untergruppe H enthält.

Beweis: Wie im Beweis des Satzes 7 sehen wir, daß H mit dem von $\{N_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ erzeugten Normalteiler $N = N_1 N_2 \ldots N_n$ von G identisch ist. Da N_k eine Untergruppe von H ist, gilt in der oben eingeführten Schreibweise $0 \leq d^{(\lambda)}(H) \leq d^{(\lambda)}(N_k) \leq r_\lambda$. Es sei für ein bestimmtes $\lambda \varepsilon \Lambda$ $d^{(\lambda)}(H) < d^{(\lambda)}(N_k)$ für alle $k=1, 2, \ldots, n$. Wie im Beweis von Satz 7 bemerkt, ist dann $d^{(\lambda)}(N_k) = r_\lambda$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$, d. h. jedes Element von N_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ wird durch die Einheitsmatrix dargestellt und das gleiche gilt für jedes Element von $H = N$. Dies widerspricht aber der Annahme $d^{(\lambda)}(H) < r_\lambda$, aus der $d^{(\lambda)}(H) = 0$ folgt.

In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß die Bedingung b) in den Sätzen 1 bis 6 auch dann notwendig ist, wenn nur $(n - 1)$ der Untergruppen H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ Normalteiler von G sind. Die angegebene beweisführung ist jedoch ohne Einführung weiterer Bedingungen nicht verwendbar, um die Notwendigkeit der Bedingung b) der Sätze 3, 4 und 6 zu zeigen, falls die Untergruppen H_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ Normalteiler der Untergruppe H sind. Grund dafür ist, daß eine irreduzible Darstellung $R^{(\lambda)}$ von G ohne weiteres mehrere verschiedene nichttriviale irreduzible Darstellungen der Untergruppe H enthalten kann. Tatsächlich läßt sich als Gegenbeispiel die alternierende Gruppe von vier Variablen anführen. Es seien H_1 und H_2 die zyklischen Gruppen der Ordnung 2, erzeugt von den Permutationen (12) (34) und (13) (24) beziehungsweise,

und H die abelsche Gruppe vom Typ (2,2), die von beiden Permutationen erzeugt wird. H ist das direkte Produkt seiner Normalteiler H_1 und H_2. Die vier nicht äquivalenten irreduziblen Darstellungen der Gruppe $G = A_4$ haben die Grade $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $r_4 = 3$. Auf Grund der Gleichung

$$\frac{12}{o(H)} = \sum_{\lambda=1}^{4} r_\lambda d^{(\lambda)}(H) \quad \text{ergibt sich} \quad d^{(4)}(H) = 0, \quad d^{(4)}(H_1) = d^{(4)}(H_2) = 1.$$

Trotzdem enthält die Komplex $H_1 H_2$ jedes Element von H genau einmal, d. h. die nach dem im Lemma verwendeten Prinzip konstruierte Folge $\{h_\nu : \nu \in w\}$ ist in H gleichverteilt.

Literatur

[1] *E. Hlawka*, Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen, Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. 2 IV (1955), 33—47.

[2] *G. Helmberg*, A Theorem on Equidistribution in Compact Groups, Pacific Journal of Math., Vol. 8, Nr. 2 (1958), 227—241.

[3] *G. Helmberg*, Generating Sets of Elements in Compact Groups, eingereicht beim Pacific Journal of Math.

Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen

Von

Hans Hornich, Wien

(Eingegangen am 14. Januar 1959)

Der Nachweis einer Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (1) bietet schon bei stetig differenzierbaren Koeffizienten gewisse eigentümliche Schwierigkeiten, wie sie bei dem Existenzbeweis von *Kamke*[1] und dem Beispiel von *Wazewski*[2] deutlich werden. Setzt man die Koeffizienten nur als stetig voraus, so hat *Perron*[3] schon darauf hingewiesen, daß auch in ganz einfachen Fällen Unlösbarkeit vorliegt, sobald man von der Lösungsfunktion stetige Differenzierbarkeit fordert. Aber auch wenn man diese Forderung reduziert und bloß Stetigkeit und die Existenz der entsprechenden Richtungsableitung von der Lösung verlangt, so ist bei nur stetigen Koeffizienten die Lösbarkeit von (1) nicht einmal im Kleinen garantiert, wie das Beispiel von *Hornich*[4] zeigt; hiebei spielen geschlossene Lösungswege der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichung (2) eine Rolle.

In dieser Arbeit soll nun ein Existenzbeweis bei linearen partiellen Differentialgleichungen (1) mit stetigen Koeffizienten gegeben werden; es zeigt sich, daß außer dem Verbot von geschlossenen Lösungswegen von (2) noch andere Bedingungen für die Lösbarkeit von (1) wesentlich sind.

I.

Sei G ein beschränktes einfachzusammenhängendes Gebiet der xy-Ebene und auf G eine gleichmäßig stetige Funktion $a(x, y)$ gegeben.

---

[1] Math. Zeitschr. **41**, S. 56, **42**, 287. **49**, S. 256, Math. Ann. **99**, S. 602, Vgl. ferner u. a. *Plis*, Bull. Acad. Pol. **IV**, S. 126.

[2] Mathematica **8**, S. 103. Math. Zeitschr. **43**, S. 522.

[3] Math. Zeitschr. **27**, S. 550.

[4] Monatsh. f. M. **59**, S. 34, Jb. d. DMV **58**, S. 103.

Wir fragen nach den Bedingungen für die Funktion $\alpha(x, y)$, bzw. für das Vektorfeld $\mathfrak{e} = (\cos \alpha(x, y), \sin \alpha(x, y))$, unter denen die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{e}} = \cos \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{1}$$

für jede in G gleichmäßig stetige Funktion $f(x, y)$ eine Lösung in G hat.

Als Lösung in G von (1) wird dabei jede in G stetige Funktion u verstanden, die in jedem Punkt von G in der durch den Winkel α gegen die x-Achse gegebenen Richtung eine Ableitung hat, die gleich f ist.

Die aufzustellenden Bedingungen beziehen sich naturgemäß auf den Verlauf der Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$d x : d y = \cos \alpha(x, y) : \sin \alpha(x, y) \tag{2}$$

Wir bezeichnen jede stetig differenzierbare Kurve $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s Bogenlänge) in G, welche (2) genügt, als *Lösungskurve* von (2). Weiter heiße eine stetige und rektifizierbare Kurve $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s Bogenlänge) in G ein *Lösungsweg* von (2), wenn die — fast überall in s differenzierbaren — Funktionen $x(s)$, $y(s)$ fast überall in s die Gleichung (2) erfüllen. Haben zwei Intervalle, in denen $x(s)$, $y(s)$ stetig differenzierbar sind, einen Endpunkt gemein, so werden die entsprechenden Lösungskurven am gemeinsamen Endpunkt stetig differenzierbar verlaufen oder dort eine Spitze aufweisen.

Es wird sich auch als notwendig erweisen, die Funktion $\alpha(x, y)$ stetig auf den Rand von G zu erweitern (was wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von α möglich ist) und auch zuzulassen, daß die Lösungswege, außer Endpunkten, auch Punkte auf dem Rand von G haben; wir merken das speziell an, indem wir dann von Lösungswegen auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$ sprechen.

Im folgenden werde stets vorausgesetzt:

Es gibt auf G und auch auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$ keine geschlossenen Lösungswege.

Diese Voraussetzung ist für die Lösbarkeit von (1) in G notwendig: gibt es einen geschlossenen Lösungsweg C in G, etwa $x(s)$, $y(s)$ $(0 \leq s \leq L)$, so muß für eine Lösung u von (1) gelten:

$$(\mathfrak{C}) \quad \int d u = \int_0^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{e}\, \mathfrak{t}) \left[\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right] d s = \int_0^{\mathfrak{L}} (\mathfrak{e}\, \mathfrak{t}) f\, d s = 0$$

wo $\mathfrak{t}$ der Tangentenvektor $(x'(s), y'(s))$ von C, also $(\mathfrak{e}\, \mathfrak{t}) = \pm 1$ ist.

Wählt man nun f gleichmäßig stetig auf G und so, daß $\int_0^{\Omega} (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t})\, f\, d\, s \neq 0$ ausfällt, so ist für diese Funktion f die Differentialgleichung (1) unlösbar.

Wir bilden zu jedem Punkt p von G die größte, p enthaltende Teilmenge $L(p)$ von G, so daß man von p aus zu jedem Punkt q von $L(p)$ auf einem Lösungsweg von (2) gelangen kann. Diese durch p bzw. durch jeden ihrer Punkte eindeutig festgelegte Menge heiße der zu p gehörige *Lösungskomplex*, kurz Lösungskomplex von G.

Zwei Lösungskomplexe von G sind entweder identisch oder zueinander fremd. Das Gebiet G ist als Summe von Lösungskomplexen eindeutig darstellbar.

Ein Lösungskomplex ist natürlich stets eine zusammenhängende Menge, i. a. weder in G abgeschlossen noch offen, kann aber offene Teilgebiete von G enthalten.

Wegen des Verbots von geschlossenen Lösungswegen gibt es zwischen zwei Punkten eines Lösungskomplexes L nur einen in L verlaufenden Lösungsweg zwischen diesen Punkten, wobei wir zweimal in verschiedener Richtung durchlaufene Wegstücke stets getilgt denken.

Sind p und q zwei Punkte eines Lösungskomplexes L und ist u eine Lösung von (1) auf G, so ist das Integral über den Lösungsweg C zwischen p und q:

$$(\mathfrak{L}) \int_p^q du = (\mathfrak{L}) \int_p^q (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t}) \left[\cos \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right] d\, s = (\mathfrak{L}) \int_p^q (\mathfrak{e}\ \mathfrak{t})\, f\, d\, s =$$

$$= u(q) - u(p). \tag{3}$$

Gibt man also auf einem Punkt p von L den Wert $u(p)$ einer Lösungsfunktion u von (1) vor, so ist damit u auch auf dem ganzen Lösungskomplex eindeutig festgelegt; es bleibt dabei nur die Frage, ob die so auf L bestimmte Funktion dort auch stetig ist. Zuvor untersuchen wir weiter den Aufbau der Lösungskomplexe auf G.

Es gibt in G höchstens abzählbar unendlichviele Lösungskomplexe, die mehr als nur eine Lösungskurve enthalten. Enthält nämlich der Lösungskomplex L außer der Lösungskurve C noch einen Lösungsweg C', der in C etwa im Punkt p einmündet, so gibt es eine von C und C' und einem hinreichend kleinen Kreisstück um den Punkt p begrenzte offene Menge O, so daß alle Lösungskurven durch O auch C oder C' treffen; also gehört dann auch O zu L und L enthält eine offene Menge. Da es aber höchstens abzählbar unendlichviele paarweise fremde offene Mengen in G geben kann, ist der Satz gezeigt.

Wir treffen nun die später durch eine stärkere zu ersetzende Annahme:

Die Länge der Lösungskurven in G sei beschränkt.

Dann läßt sich jede Lösungskurve C nach beiden Richtungen bis an den Rand von G fortsetzen und trennt das Gebiet G in zwei Teilgebiete. Führte die unbeschränkt in G fortgesetzte Lösungskurve C zu keinem Randpunkt von G, so wäre C abgeschlossen und hätte vom Rand von G einen positiven Abstand d. Dann könnte von jedem Punkt von C die Kurve mindestens um einen Bogen der Länge d fortgesetzt werden, und da C keine geschlossenen Teilkurven enthält, wäre C von unendlicher Länge. Also läßt sich jede Lösungskurve beiderseits bis an den Rand fortsetzen und hat, weil es auch auf $\overline{G}$ keine geschlossenen Lösungskurven gibt, zwei verschiedene Randpunkte. Dann wird G durch C in zwei Gebiete zerlegt, die den beiden Ufern von C entsprechen.

Sei Λ eine zusammenhängende Menge von abzählbarvielen Lösungskomplexen aus G. Dann gibt es nur abzählbarviele Lösungskomplexe, die mit dem Rand von Λ[5] Punkte gemeinsam haben.

Nach dem Vorigen brauchen wir nur diejenigen Lösungskomplexe zu berücksichtigen, die nur aus einer Lösungskurve bestehen und nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ enthalten. Jede solche Lösungskurve zerlegt nun G in zwei Teilgebiete, so daß eines dieser Gebiete die Menge Λ enthält. Diese Lösungskurve bestimmt also auch ein zu Λ fremdes Teilgebiet von G. Sind nun C_1 und C_2 zwei verschiedene Lösungskomplexe, die je aus einer Lösungskurve bestehen und die nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ enthalten, und seien G_1 resp. G_2 die von C_1 resp. C_2 bestimmten, zu Λ fremden Teilgebiete von G; dann sind G_1 und G_2 zueinander fremd. Wäre das nicht der Fall, so könnten wir C_1 und C_2 innerhalb $G_1 \cup G_2$ durch einen Polygonzug Π_1 verbinden. Ebenso kann man aber, da C_1 und C_2 Häufungspunkte von Λ enthalten und Λ zusammenhängend ist, C_1 und C_2 durch einen Polygonzug Π_2 verbinden, der in dem Λ enthaltenden Gebiet von $G - C_1 - C_2$ verläuft. Also gibt es auch einen geschlossenen Weg innerhalb G, der sowohl im Innern als im Äußeren Endpunkte von Lösungskurven, also Randpunkte von G enthält, entgegen dem, daß G einfachzusammenhängend ist. — Also gibt es auch nur höchstens abzählbar unendlichviele Lösungskurven, die nicht zu Λ gehören, aber Häufungspunkte von Λ

[5] Rand von Λ sei die Menge aller Punkte von G, die Häufungspunkte von Λ und von $G - \Lambda$ sind.

enthalten, sonst gäbe es ja mehr als abzählbarviele paarweise fremde Gebiete in G.

Es gibt daher zu jedem Punkt p von G eine größte, aus abzählbarvielen Lösungskomplexen bestehende, p enthaltende zusammenhängende Teilmenge von G; diese heiße die zum Punkt p gehörige *Lösungskomponente*. Eine Lösungskomponente von G ist durch jeden ihrer Punkte eindeutig bestimmt und G ist als Summe von Lösungskomponenten eindeutig darzustellen. Zwei Lösungskomponenten sind entweder identische oder zueinander fremde Mengen.

Nach dem obigen ist die zu p gehörige Lösungskomponente K eine in G *abgeschlossene* Menge.

Enthält K eine nichtleere offene Menge, so gibt es in K auch Lösungskomplexe L_i mit nichtleeren offenen Mengen. Der Rand von K in bezug auf G besteht aus Lösungskurven. Jede solche Lösungskurve zerlegt G in zwei Teilgebiete, deren eines zu K fremd ist.

Enthält K keine offene Menge, so gibt es in K auch keine Lösungskomplexe, die offene Mengen enthalten, also ist jeder Lösungskomplex von K eine Lösungskurve und K reduziert sich gleichfalls auf eine Lösungskurve.

Für den Aufbau einer Lösung von (1) auf G wird sich — außer dem schon verwendeten Verbot von geschlossenen Lösungswegen — für den Verlauf der Lösungen von (2) noch folgende Bedingung als notwendig erweisen:

(B) Besteht die Lösungskomponente K aus den abzählbarvielen Lösungskomplexen $L_n (n = 1, 2, \ldots)$ also $K = \sum_n L_n$, und ist in L_n das Supremum aller Längen der Lösungswege zwischen je zwei Punkten aus L_n gleich σ_n, so konvergiere $\sum_n \sigma_n$, und es sei gleichmäßig für alle K: $\sum_n \sigma_n < \sigma$.

Insbesonders gilt also für die Längen der Lösungswege in einem Lösungskomplex:

(B*) Die Länge der Lösungswege zwischen je zwei Punkten eines Lösungskomplexes von G ist gleichmäßig beschränkt.

Diese Voraussetzung soll ein zu starkes Auseinanderstreben der Lösungskomplexe verhindern. Wir werden später an Beispielen ihre Notwendigkeit für den Existenzsatz zeigen.

Unter dieser Voraussetzung gilt dann das folgende für den Beweis des Existenzsatzes zu verwendende *Lemma*:

Sei $L_1, L_2, \ldots$ eine Folge von — gleichen oder verschiedenen — Lösungskomplexen auf G. Sei ferner p_n ein Punkt von L_n und es konvergiere $p_n \to p_0$, wo p_0 ein Punkt des Lösungskomplexes L_0 sei. Die Funktion u sei auf den Lösungskomplexen L_n und L_0 so bestimmt, daß für je zwei Punkte eines Lösungskomplexes die Relation (3) gelte und daß

$$\lim u(p_n) = u(p_0)$$

sei. Dann gilt für jede konvergente Folge von Punkten $q_1, q_2, \ldots$ mit q_n in L_n und $\lim q_n = q_0$ in L_0 auch

$$\lim u(q_n) = u(q_0).$$

Wir untersuchen zunächst die Aussage des Lemmas in einigen Spezialfällen.

Sind alle L_n identisch $L_1 = L_2 = \ldots = L_0$, und setzt man $p_1 = p_2 = \ldots = p_0$ und $u(p_1) = u(p_2) = \ldots = u(p_0)$, so liefert unser Lemma den Nachweis der Stetigkeit der nach (3) gebildeten Funktion u auf unserm Lösungskomplex, auf dem u für p_0 vorgegeben ist. Liegen die p_n und q_n auf dem Lösungskomplex L_1, p_0 und q_0 aber auf dem Lösungskomplex L_2, so zeigt unser Lemma, daß wir die Funktion u stetig von L_1 auf L_2 fortsetzen können, wenn $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend ist.

Auf dieselbe Art können wir u in endlichviele Lösungskomplexe $L_1, L_2, \ldots, L_n$ fortsetzen, wenn etwa u auf L_1 gegeben ist und $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend ist, ebenso $L_2 \cup L_3$, usf. etwa bis $L_{n-1} \cup L_n$. Dabei ist zu bemerken, daß zwei nicht in dieser Reihenfolge aufeinanderfolgende L_i stets getrennt sind: wäre nämlich $L_1 \cup L_3$ ebenfalls zusammenhängend, so seien C_1, C_2, C_3 drei Lösungskurven aus L_1, L_2, L_3; wir verbinden C_1 mit C_2 in $L_1 \cup L_2$ durch eine Kurve γ_3, C_2 mit C_3 in $L_2 \cup L_3$ durch eine Kurve γ_1 und C_3 mit C_1 in $L_3 \cup L_1$ durch eine Kurve γ_2. Dann ist $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ (ev. mit gewissen Teilbogen aus C_1, C_2, C_3) eine geschlossene Kurve k in G. Das Innere von k liegt in der Summe $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Es gibt dann im Innern von k oder auf k einen Punkt p, der in dem Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen $\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2 \cap \overline{L}_3$ liegt[6]. Gehört p etwa zu L_1, so legen wir eine Lösungskurve C_1' durch p; nun ist p Häufungspunkt von L_2 und von L_3, also auch von Lösungskurven C_2' und C_3', die zu L_2 und zu L_3 gehören. Dies ist ersichtlich aber unmöglich, da jede Lösungskurve ja das Gebiet G trennt.

---

[6] Zum Beweis vgl. etwa *Hornich*, Anz. d. Wiener Akad. **66**, S. 212.

Beweis des Lemmas: Sei C_n der Lösungsweg zwischen p_n und q_n auf L_n und C_0 der Lösungsweg zwischen p_0 und q_0 auf L_0. Zunächst sei $p_0 \neq q_0$. C_n bzw. C_0 sei dargestellt durch

$$x = x_n(t), \quad y = y_n(t), \quad \text{bzw.} \quad x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

wobei der Parameter t jeweils bis auf einen konstanten Faktor die von p_n, bzw. p_0 an gezählte Bogenlänge sei. Wegen der Beschränktheit der Längen von C_n und C_0 (Voraussetzung B*) sind die Funktionen $x_n(t)$, $y_n(t)$ gleichmäßig stetig für alle n und $0 \leq t \leq 1$. Wir können nun eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ so auswählen, daß etwa für alle rationalen t

$$x_{n_k}(t) \to x(t) \text{ und } y_{n_k}(t) \to y(t)$$

konvergiert; die $x_{n_k}(t)$ und $y_{n_k}(t)$ konvergieren dann auch für alle $0 \leq t \leq 1$, u. z. gleichmäßig und die Grenzfunktionen $x(t)$, $y(t)$ sind stetig; die Grenzkurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ ist wieder rektifizierbar. Die Grenzkurve braucht nicht in G zu liegen, liegt aber stets in der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$. Die Funktionen genügen fast überall der Differentialgleichung (2). Die Grenzkurve ist daher ein Lösungsweg in $\overline{G}$ zwischen den Punkten p_0 und q_0. Da ein solcher aber eindeutig auch in $\overline{G}$ festgelegt ist, ist diese Grenzkurve C mit C_0 ev. bis auf zweifach in verschiedener Richtung durchlaufene Stücke eines Lösungsweges identisch. Sieht man von solchen für unser Problem unwesentlichen Wegstücken ab, so konvergieren alle C_n gegen C_0 und es ist für unsere Funktion u:

$$\lim (C_n) \int_{p_n}^{q_n} du = \lim (C_n) \int_{p_n}^{q_n} (\mathrm{e}\, \mathrm{t})\, f\, ds = (C_0) \int_{p_0}^{q_0} (\mathrm{e}\, \mathrm{t})\, f\, ds = (C_0) \int_{p_0}^{q_0} du$$

also

$$\lim (u(q_n) - u(p_n)) = u(q_0) - u(p_0)$$

und

$$\lim u(q_n) = u(q_0).$$

Endlich kann in unserem Lemma auch $p_0 = q_0$ genommen werden: wir brauchen nur eine weitere Punktfolge mit einem Grenzpunkt $\neq p_0$ in L_0 heranzuziehen und das eben gezeigte Lemma zweimal anzuwenden.

Sei p ein Punkt von G und L der p enthaltende Lösungskomplex. Wir wählen u an der Stelle p willkürlich und bestimmen u nach (3) in L. Nach dem Lemma ist dann u auf L stetig. Ferner ist nach dem Lemma u auch in den ev. vorhandenen Häufungspunkten von L in

G, die nicht in L liegen, bestimmt. Es ist daher u auch in den Lösungskomplexen, die solche Häufungspunkte enthalten, gegeben und ferner auch in jedem Lösungskomplex, von dem ein Häufungspunkt in L liegt. Endlich ist in jeder zusammenhängenden Vereinigungsmenge von endlichvielen Lösungskomplexen $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$, die den Punkt p enthält, die Funktion u eindeutig und stetig festgelegt, sobald u im Punkt p gegeben ist.

Nun enthält die zu p gehörige Lösungskomponente K u. U. unendlichviele Lösungskomplexe (vgl. Beispiel c), etwa $K = \sum_{i=1}^{\infty} L_i$. Nach unserer Voraussetzung B strebt das Supremum s_i der Länge aller Lösungswege in L_i mit $i \to \infty$ gegen Null. Für hinreichend große i gibt es in L_i daher nur beliebig kurze Lösungskurven C_i; jede solche Kurve trennt das Gebiet G.

Sei nun $(p_1, p_2, \ldots)$ eine konvergente Punktfolge aus K und es liege p_i in L_{n_i}. Dann ist $p_0 = \lim p_i$ sicher nicht ein Punkt von G, wenn $\overline{\lim}\, n_i = +\infty$ ist. Liegt nämlich p_i auf der Lösungskurve C_{n_i} von L_{n_i}, so ist diese von einer Länge $< s_{n_i}$, also von beliebig kleiner Länge für hinreichend große n_i. Dann gibt es in beliebiger Nähe von p_0 auch Randpunkte von G und weil der Rand von G abgeschlossen ist, gehört p_0 als Limes der p_i zum Rand von G, also nicht zu G.

Um die Stetigkeit von u in der Lösungskomponente K zu zeigen, brauchen wir daher nur die konvergenten Punktfolgen $(p_1, p_2, \ldots)$ mit p_i in L_{n_i} mit beschränkten n_i zu betrachten; für die Vereinigungsmengen $L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ endlichvieler L_i ist aber die Stetigkeit von u nach dem Lemma gegeben.

Es bleibt noch die Lösung für das ganze Gebiet G zu bestimmen. Dazu zeigen wir das folgende erweiterte Lemma:

Sei $K_1, K_2, \ldots$ eine Folge von paarweise verschiedenen Lösungskomponenten und p_n ein Punkt von K_n, so daß $p_n \to p_0$, wobei p_0 der Lösungskomponente K_0 angehöre. Seien ferner die Werte $u(p_n)$ so gewählt, daß $u(p_n) \to u(p_0)$ konvergiere. Die dadurch in den K_n und in K_0 bestimmten Werte von u sind dann so beschaffen, daß für jede konvergente Folge von Punkten $q_1, q_2, \ldots$ mit q_n in K_n und $q_n \to q_0$, q_0 in K_0, die Werte $u(q_n) \to u(q_0)$ konvergieren.

Gehören p_n und q_n, sowie p_0 und q_0 innerhalb der Mengen K_n und K_0 stets zu demselben Lösungskomplex, so erhalten wir unser früheres Lemma.

Wir stellen die Komponenten K als Summen ihrer Lösungskomplexe dar:

$$K_n = \sum_m L_{nm} \qquad K_0 = \sum_m L_{0m}$$

Dabei denken wir uns die L_{nm} und L_{0m} so numeriert, daß p_0 in L_{00}, p_n in L_{n0}, q_0 in L_{0k_0} und q_n in L_{nk_n} liegt; weiter seien für jedes n die Vereinigungsmengen $L_{nr-1} \cup L_{nr}$ $(r = 1, \ldots, k_n)$ und ebenso die Mengen $L_{0r-1} \cup L_{0r}$ $(r = 1, \ldots, k_0)$ zusammenhängende Mengen.

Seien nun L_1, L_2 zwei Lösungskomplexe, p ein Punkt in L_1, q in L_2. Ferner sei $L_1 \cup L_2$ zusammenhängend; dann gibt es etwa in L_1 eine Punktfolge $r_1\ r_2\ \ldots$ die gegen einen Punkt r_0 in L_2 konvergiert. Wir können dann p mit r_n durch einen Lösungsweg C_n in L_1 verbinden und genau wie im Beweis unseres Lemmas folgt die Existenz einer stetigen rektifizierbaren Grenzkurve $x = x(t)$ $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ zwischen p und r_0 die fast überall der Differentialgleichung (2) genügt und in der abgeschlossenen Hülle von L_1 also auch in $\overline{G}$ verläuft. Da weiter r_0 und q in L_2 durch einen Lösungsweg in L_2 verbunden werden können, gibt es auch einen in $\overline{G}$ verlaufenden Lösungsweg zwischen p und q. Seine Länge ist $\leq \sigma_1 + \sigma_2$, wo σ_1, σ_2 die oberen Schranken der Längen der Lösungswege in L_1, L_2 sind.

Ist nun σ_{nm} das Supremum der Längen der Lösungswege in L_{nm}, so ist nach der Voraussetzung B die Summe $\sum_m \sigma_{nm}$ gleichmäßig für alle n beschränkt, etwa $\leq \sigma$. Wir können also für jedes n die Punkte p_n und q_n durch einen in $\overline{G}$ verlaufenden Lösungsweg W_n mit einer Länge $\leq \sigma$ verbinden. Wieder wie im Beweis unseres Lemmas gibt es dann eine stetige rektifizierbare Grenzkurve W dieser W_n, etwa $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ zwischen p_0 und q_0 von einer Länge $\leq \sigma$, die fast überall der Differentialgleichung (2) genügt und mit dem in der abgeschlossenen Hülle von K_0 zwischen p_0 und q_0 zu bildenden Lösungsweg übereinstimmt. Es gilt dann:

$$u(q_0) - u(p_0) = (W) \int_{p_0}^{q_0} du = \lim\,(W_n) \int_{p_n}^{q_n} du = \lim\,(u(q_n) - u(p_n))$$

und daher auch

$$u(q_0) = \lim u(q_n).$$

Auf Grund des damit gezeigten erweiterten Lemmas können wir nun Lösungsfunktionen u von (1) in G konstruieren und auch gleich feststellen, inwieweit wir die Funktionen u willkürlich angeben können.

Seien K', K'' zwei verschiedene Lösungskomponenten; wir verbinden die Punkte p' auf K' und p'' auf K'' durch einen Polygonzug Π in G. Sind q', q'' Punkte von Π, die derselben Lösungskomponente angehören, so denken wir uns das offene Intervall zwischen q' und q'' von Π getilgt. In der schließlich verbleibenden Menge Π' gehören je zwei verschiedene Punkte auch zu verschiedenen Lösungskomponenten, außer den Endpunkten q_n', q_n'' der getilgten Intervalle. Wir wählen nun $u(q_1')$, dann ist auch $u(q_1'')$ bestimmt; sodann $u(q_2')$, wodurch auch $u(q_2'')$ bestimmt ist usw.; dabei wählen wir die $u(q_n')$ so, daß sie auf der Menge der q_n' und deren Häufungspunkte stetig sind. Ist nun q ein Häufungspunkt von Punkten q_n'', $q = \lim q_{n_k}''$, so ist auch $q = \lim q_{n_k}'$. Nach unserer Konstruktion ist aber $u(q) = \lim u(q_{n_k}')$, also nach unserm Lemma auch $= \lim u(q_{n_k}'')$ und u auch für die Menge der q_n'' und deren Häufungspunkte stetig. Setzen wir u auf den verbliebenen Intervallen von Π' noch stetig fest, so ist nach unserm Lemma u für alle Lösungskomponenten zwischen K' und K'' stetig erklärt. Die Iteration des Verfahrens liefert schließlich für ganz G eine Lösungsfunktion u.

Die Analogie mit dem klassischen Cauchyschen Problem bei stetig differenzierbaren Koeffizienten in (1) ist deutlich: an Stelle der Lösungskurven treten hier die Lösungskomponenten K, für die der Wert an je einer Stelle vorgegeben werden kann.

Wir formulieren zusammenfassend den hier gezeigten *Existenzsatz*: *Sei G ein beschränktes einfachzusammenhängendes Gebiet. In G sei $a(x, y)$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Ferner gelte für die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung* (2):

A. es gibt auf G und auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{G}$ keine geschlossenen Lösungswege von (2);

B. besteht die Lösungskomponente K aus den abzählbarvielen Lösungskomplexen L_n, so konvergiert die Summe der Suprema σ_n der Längen aller Lösungswege zwischen zwei Punkten aus L_n $\sum_n \sigma_n \leq \sigma$ und ist gleichmäßig beschränkt für alle K.

Dann hat die partielle Differentialgleichung (1) *für jede in G gleichmäßig stetige Funktion f eine Lösung in G. Man kann dabei für eine in G dichtliegende Menge von Lösungskomponenten die Werte von u an je einer Stelle dieser Lösungskomponenten in der angegebenen Weise willkürlich vorgeben.*

Die homogene Differentialgleichung

$$\cos \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

hat eine nichttriviale (nichtkonstante) Lösung dann und nur dann, wenn mehr als nur eine Lösungskomponente in G existiert.

II.

Wir zeigen noch, daß die angegebenen Bedingungen für die Lösbarkeit von (1) auch notwendig sind. Sieht man von der sicher notwendigen Bedingung ab, daß keine geschlossenen Lösungswege in G existieren sollen, so geben wir zu der Bedingung, daß G einfachzusammenhängend sei, sowie zu der Bedingung (B) bzw. der schwächeren Bedingung (B*) unseres Existenzsatzes drei Beispiele, in denen die Differentialgleichung (1) unlösbar ist. In allen Beispielen gibt es keine geschlossenen Lösungswege von (2) in G.

Beispiel a

Sei

$$g(x) = \exp\left[-\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right].$$

G sei das offene Quadrat $|x| < 2$, $|y| < 2$, aus dem die abgeschlossene Menge K:

$$|x| \leq 1, \ |y| \leq g(x)$$

herausgenommen sei.

Auf G betrachten wir die Kurvenschar

$$\begin{aligned} y &= C \text{ für } |x| \geq 1 \\ &= C + g(x) \text{ für } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

für alle $C > 0$, soweit natürlich diese Kurven innerhalb G liegen; analog ferner

$$\begin{aligned} y &= C \text{ für } |x| \geq 1 \\ &= C - g(x) \text{ für } |x| \leq 1 \end{aligned}$$

für alle $C < 0$ und endlich die geraden Strecken

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad -2 < x < -1 \\ y &= 0, \quad 1 < x < 2. \end{aligned}$$

Durch jeden Punkt von G geht genau eine der angegebenen Kurven und wir bestimmen die Funktion $\alpha(x, y)$ auf G so, daß α den Richtungswinkel der durch den Punkt (x, y) gehenden Kurve gibt. Dabei sei

$|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gewählt. Es ist α in G gleichmäßig stetig und sogar beliebig oft differenzierbar. Die oben angegebenen Kurven auf G sind jeweils sowohl Lösungskomplexe als Lösungskomponenten, es gibt keine geschlossenen Lösungskurven in G, wohl aber in $\overline{G}$ und die Bedingung B unseres Existenzsatzes ist erfüllt. G ist nicht einfachzusammenhängend.

Wir setzen $f = y$ und zeigen, daß dann die Differentialgleichung (1) unlösbar ist. Wäre u eine Lösung von (1) in G so können wir o. B. d. A. etwa $u(-\frac{3}{2}, 0) = 0$ annehmen. Sei nun (ε_n) eine Folge von Zahlen $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ und seien $P_n(-\frac{3}{2}, \varepsilon_n)$ und $Q_n(\frac{3}{2}, \varepsilon_n)$ zwei Punkte, die also auf derselben Lösungskurve C_n von (2) liegen. Dann ist

$$u(\tfrac{3}{2}, \varepsilon_n) - u(-\tfrac{3}{2}, \varepsilon_n) = (C_n) \int_{P_n}^{Q_n} [\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial y}]\, d s =$$

$$= (C_n) \int_{P_n}^{Q_n} y\, d s > \int_{-1}^{+1} g(x)\, d x > 0.$$

Andererseits liefert die durch die Punkte $\overline{P}_n(-\frac{3}{2}, -\varepsilon_n)$ und $\overline{Q}_n(+\frac{3}{2}, -\varepsilon_n)$ gehende Lösungskurve $\overline{C}_n$ von (2):

$$u(\tfrac{3}{2}, -\varepsilon_n) - u(-\tfrac{3}{2}, -\varepsilon_n) = (\overline{C}_n) \int_{\overline{P}_n}^{\overline{Q}_n} [\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x}]\, d s =$$

$$= (\overline{C}_n) \int_{\overline{P}_n}^{Q_n} y\, d s < -\int_{-1}^{+1} g(x)\, d x < 0$$

was zur Stetigkeit von u in $(-\frac{3}{2}, 0)$ und $(\frac{3}{2}, 0)$ sofort einen Widerspruch gibt.

Beispiel b

Sei $A_0 = 0$, $A_n = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2}$ und $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$. Wir bilden für jedes ganze $n \geq 0$ die Schar der Kurven $S'_n(\lambda)$:

$$y = 2\,A_n + \frac{\lambda}{(n+1)^2}\sin^2 x,\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 1\right)$$

ferner die Kurven $T_n(\lambda)$:

$$y = 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2}\sin^2 x + \frac{\lambda}{(n+1)^2}\cos^2 x\ \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 2\right)$$

und endlich die Kurven $S''(\lambda)$

$$y = 2A_n + \frac{1}{(n+1)^2}(1+\cos^2 x) + \frac{\lambda}{(n+1)^2}\sin^2 x\,(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \lambda \leq 1).$$

Die von allen diesen Kurven mit $n = 0, 1, \ldots$ überdeckte Menge (wir lassen nur diese gerade Strecke $S_0(0)$ fort) sei M; ferner sei G das Gebiet

$$|x| < \pi,\quad 0 < y < 2\,A + 1.$$

Wir bestimmen die Funktion $\alpha(x, y)$ auf M so, daß α den Richtungswinkel der Kurve S'_n, S''_n bzw. T_n, die durch den Punkt (x, y) geht, liefert, wobei $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gewählt werde; auf den Punkten von $G - M$ werde $\alpha = 0$ gesetzt. Die Kurven S'_n, S''_n, T_n, bzw. die Strecken $y = \text{const.}$ auf $G - M$ sind dann die Lösungskurven der Differentialgleichung (2). Man sieht sofort, daß α in G gleichmäßig stetig ist.

Alle Kurven $S'_n(\lambda)$ münden in den Punkt $(0, 2\,A_n)$ und alle Kurven $T_n(\lambda)$ münden in den Punkt $(\frac{\pi}{2},\ 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2})$. Ferner ist die Kurve $S'_n(1) = T_n(0)$. Also bildet die Vereinigungsmenge aller Kurven S'_n $(n > 0)$, S''_n $(n \geq 0)$, T_n $(n \geq 0)$ mit ihren geradlinigen Fortsetzungen $y = \text{const.}$ auf $G - M$ einen Lösungskomplex L. Jede Kurve S'_0 $(\lambda > 0)$ mit ihrer geradlinigen Fortsetzung für $x > \frac{\pi}{2}$ bildet für sich einen Lösungskomplex und eine Lösungskomponente. Die geraden Strecken $|x| < \pi$, $y = c$ mit $2\,A \leq c \leq 2\,A + 1$ bilden die weiteren Lösungskomplexe L_c von G. Es ist weiter $L \cup L_{2A} = K_0$ eine Lösungskomponente, jeder Lösungskomplex $L_c (c > 2\,A)$ ist ebenfalls Lösungskomponente.

Es ist also schon in dem Lösungskomplex L die Länge der Lösungswege unbeschränkt und daher die Bedingung (B) des Existenzsatzes, ja sogar die schwächere Bedingung (B*) nicht erfüllt.

Wir definieren eine Funktion f u. z. sei für

$$2\,A_n \leq y \leq 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2\,A_n)\,(n+1)^2\,\pi\right]$$

und für

$$2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq y \leq 2\,A_{n+1}$$

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2\,A_n - \frac{1}{(n+1)^2})\,(n+1)^2\,\pi + \pi\right],$$

während für $y \geq 2\,A$ die Funktion $f = 0$ sei. Es ist dann f auf G gleichmäßig stetig und wir zeigen, daß für diese Funktion die Differentialgleichung (1) unlösbar ist.

Eine Lösung u wäre auf jeder der geraden Strecken

$$y = 2\,A_n \text{ und } y = 2\,A_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

konstant, etwa $u = k_n$ für $y = 2\,A_n$.

Nun ist

$$k_{n+1} - k_n = (S'_n(1)) \int f\,ds - (T_n(2)) \int f\,ds.$$

Es ist $f \geq 0$ für $S_n(1)$ und $f \leq 0$ für $T_n(2)$, u. z. ist für $S_n(1)$

$$f = \frac{1}{n} \sin(\pi \sin^2 x)$$

und für $T_n(2)$

$$f = \frac{1}{n} \sin(\pi \cos^2 x + \pi).$$

Beschränkt man sich auf das Intervall

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\,\pi}{6},$$

so ist dort stets $|f| \geq \frac{1}{n\sqrt{2}}$ und daher

$$k_{n+1} - k_n \geq \frac{\pi}{3\sqrt{2}\,n}$$

Also divergiert $k_n \to \infty$ und es ist u notwendig für $y = 2\,A$ unstetig.

Beispiel c

Mit den Bezeichnungen A_n und A wie oben bilden wir für jedes natürliche n die Schar der Kurven: $S_n(\lambda)$

$$y = 2A_n - \frac{1}{n^2} + \frac{\lambda}{n^2}\cos^2\frac{x}{\lambda} \text{ mit } -\frac{\pi}{2}|\lambda| \leq x \leq 0$$

für alle $0 < |\lambda| < 1$, sowie die gerade Strecke $S_n(0)$

$$y = 2A_n - \frac{1}{n^2} \text{ für } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0.$$

Die von dieser Schar überdeckte Menge sei M_n. Ferner sei Q das Rechteck

$$0 < x < 1$$
$$0 < y < 2A + 1.$$

Dann ist $Q + \sum_1^\infty M_n = G$ eine offene Menge. Die Funktion $\alpha(x_1, x_2)$ auf G werde so bestimmt, daß α in M_n den Richtungswinkel der Kurvenschar $S_n(\lambda)$ liefert, wobei $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gewählt werde; auf Q sei $\alpha = 0$. Die Kurven $S_n(\lambda)$ bzw. die Strecken $y = \text{const}$ auf Q sind also die Lösungskurven der Differentialgleichung (2). Man bestätigt, daß α in G gleichmäßig stetig ist.

Da alle Kurven von $S_n(\lambda)$ auf der geraden Strecke $S_n(0)$ münden, bilden diese mit ihren geradlinigen Fortsetzungen $y = \text{const.}$ auf Q jeweils einen Lösungskomplex L_n. Ferner ist jede gerade Strecke in Q

$$y = 2A_n;\ 0 < x < 1$$

für sich wieder ein Lösungskomplex (eine Lösungskurve), den wir etwa mit L'_n bezeichnen. Alle geraden Strecken $0 < x < 1$, $y = c$ mit $2A \leq c < 2A + 1$ sind ebenfalls Lösungskomplexe, wir bezeichnen diese etwa mit L''_c.

Die in G abgeschlossene Vereinigungsmenge $\sum_{n=1}^\infty L_n \cup \sum_{n=1}^\infty L'_n \cup L''_{2A}$ bildet eine Lösungskomponente K. Jedes L''_c mit $c > 2A$ ist gleichfalls Lösungskomponente.

Ersichtlich sind zwar alle Lösungswege in G von beschränkter Länge, aber die Bedingung B ist für K nicht erfüllt.

Wir setzen nun für

$$2A_{n-1} \leq y \leq 2A_n$$

die Funktion

$$f = \frac{1}{n} \sin\left[(y - 2A_{n-1})\, n^2 \pi\right],$$

während für $y \geq 2A$ die Funktion $f = 0$ gesetzt werde. f ist auf G gleichmäßig stetig.

Wir zeigen, daß für diese Funktion f die Differentialgleichung (1) in G unlösbar ist.

Zunächst wäre die Lösung u auf jeder der geraden Strecken in G

$$y = 2A_n$$

konstant, etwa $= k_n$. Nun ist

$$k_n - k_{n-1} = \lim_{\lambda \to 1} \left[(S_n(\lambda) \int f\, ds - (S_n(-\lambda)) \int f\, ds\right].$$

Es ist $f \geq 0$ für $S_n(\lambda)$ und $f \leq 0$ für $S_n(-\lambda)$ bei $\lambda > 0$.

Beschränken wir uns auf das Intervall $-\frac{2\pi}{6} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$, so strebt dort für $S_n(\lambda)$ und $S_n(-\lambda)$ für $\lambda \to 1$ der absolute Betrag $|f|$ gegen Werte $\geq \frac{1}{n\sqrt{2}}$ und daher ist

$$k_n - k_{n-1} \geq \frac{\pi}{3\sqrt{2}\, n}.$$

Also divergiert $k_n \to \infty$ und es ist u für $0 < x < 1$ und $y \to 2A$ unstetig.

Kummer's Congruences (mod 2^r)

By

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

(Received January 26, 1959)

1. Put

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_0^\infty E_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad E_n = 2^n E_n(\tfrac{1}{2}) \tag{1.1}$$

so that $E_n(x)$ is the Euler polynomial of degree n and E_n is the Euler number in the even suffix notation. It is well-known that E_n satisfies

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s}\binom{r}{s} E_{n+sw} \equiv 0 \pmod{(p^n, p^{r^e})}, \tag{1.2}$$

where p is an odd prime and w is a positive integer such that

$$p^{e-1}(p-1) \mid w.$$

For $p = 2$, as *Nielsen* points out in his book [3, p. 274], the method of proof no longer applies. Moreover the work of *Stern* [5], which is reproduced by *Bachmann* [1, p. 37], is based on a quastionable use of divergent series, as noted by *Frobenius* [2, p. 845]. *Frobenius* has, however, stated the following result:

If a, b, r are integers, $a \geq 0$, $b > 0$, $r > 0$, then the power of 2 dividing the number

$$E^{2a}(1 - E^{2b})^r \tag{1.3}$$

is the same as the power of 2 dividing the number

$$(2b)^r \cdot r! \tag{1.4}$$

We shall sketch a proof of *Frobenius*' result. It is convenient to use the notation of *Nörlund* [4, Ch. 2].

In particular if

$$C_n = 2^n E_n(0),$$

then

$$E^n = (C+1)^n, \quad C^n = (E-1)^n, \tag{1.5}$$

$$C_{n-1} = 2^n(1 - 2^n)\frac{B_n}{n}, \tag{1.6}$$

where B_n is the Bernoulli number defined by

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_0^\infty B_n \frac{t^n}{n!}.$$

If $f(x)$ is an arbitrary polynomial, it follows from (1.6) that

$$f'(C) = f(2\,B) - f(4\,B). \tag{1.7}$$

In particular

$$n(C + 1)^{n-1} = (2\,B + 1)^n - (4\,B + 1)^n.$$

Since $(2\,B + 1)^n = 0$ for n odd, we get

$$f'(E) = -f(4\,B + 1), \tag{1.8}$$

where now $f(x)$ is odd.

In (1.8) take

$$f(x) = x^{2a+1}(1 - x^{2b})^r.$$

Then since

$$(4\,B + 1)^{2b} - 1 = \sum_{j=1}^{2b} \binom{2b}{j} (4\,B)^j,$$

it follows easily that

$$f(4\,B + 1) \equiv 0 \pmod{2^{re+r}}, \tag{1.9}$$

where 2^e is the highest power of 2 dividing $2\,b$.

As for the left member of (1.8), we have

$$f'(E) = (2\,a + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r - 2\,r\,b\,E^{2a+2b}\,(1 - E^{2b})^{r-1}.$$

Thus, using (1.9)

$$(2\,a + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r \equiv 2\,r\,b\,E^{2a+2b}(1 - E^{2b})^{r-1} \pmod{2^{re+r}}.$$

Repeated application of this congruence leads to

$$(2\,a + 1)\,(2\,a + 2\,b + 1)\,\ldots\,(2\,a + 2(r - 1)\,b + 1)\,E^{2a}(1 - E^{2b})^r \equiv$$
$$\equiv (2\,b)^r\,r! \pmod{2^{re+r}}. \tag{1.10}$$

Since $2^r \nmid r!$, it is clear that (1.10) contains the result of Frobenius cited above. We may state

Theorem 1. *Let* $2^e \mid 2\,b$, $2^{e+1} \nmid 2\,b$, *Then for* $a \geq 0$, $r \geq 0$, (1.10) *holds. In particular the power of* 2 *dividing* $E^{2a}(1 - E^{2b})^r$ *is the same as the power of* 2 *dividing* $(2\,b)^r\,r!$

2. To find congruences for the Bernoulli numbers we recall the explicit formula

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^n. \tag{2.1}$$

This yields

$$B^{2a}(1 - B^{2b})^r = \sum_k \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r = S_1 + S_2,$$

where

$$S_1 = \sum_{k<2^t-1} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (1-)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r,$$

$$S_2 = \sum_{k\geq 2^t-1} \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r;$$

t will be chosen later. Let $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$, so that

$$s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{(2^{2a}, 2^{(e+2)r})};$$

thus

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{(2^{2a}, 2^{(e+2)r})}. \tag{2.2}$$

On the other hand we have also

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} s^{2a}(1 - s^{2b})^r \equiv 0 \pmod{k!} \tag{2.3}$$

We apply (2.2) to S_1 and (2.3) to S_2. It follows first that

$$S_1 \equiv 0 \pmod{(2^{2a-t+1}, 2^{(e+2)r-t+1})} \tag{2.4}$$

As for S_2, consider the quotient $k!/(k+1)$. Now for $k = 2^t - 1$, we get 2^z, where

$$z = (2^t - t - 1) - t = 2^t - 2t - 1. \tag{2.5}$$

This is indeed the minimum exponent (for $t \geq 2$). Consequently

$$S_2 \equiv 0 \pmod{2^z}, \tag{2.6}$$

where z is defined by (2.5).

To simplify the discussion we assume $2a \geq (e+2)r$, so that (2.4) reduces to

$$S_1 \equiv 0 \pmod{2^{(e+2)r-t+1}}.$$

If we pick t to satisfy

$$2^t \leq (e+2)r + 2 < 2^{t+1}, \tag{2.7}$$

then certainly

$$z = 2^t - 2t - 1 < (e+2)r - t + 1$$

and it follows that

$$B^{2a}(1 - B^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^z}. \tag{2.8}$$

We have proved

Theorem 2. *Let* $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ *and suppose that* $2a \geq (e+2)r > 2$. *Define the integer* t *by means of* (2.7). *Then if* $t \geq 3$, (2.8) *holds with* $z = 2^t - 2t - 1$. *For* $t = 2$, (2.8) *holds with* $z = 1$.

The last sentence of the theorem is a consequence of the congruence

$$2B_{2a} \equiv 1 \pmod 4 \qquad (a \geq 1), \tag{2.9}$$

since this implies

$$2B^{2a}(1 - B^{2b})^r \equiv \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \equiv 0 \pmod 4$$

for all $a, r \geq 1$.

Presumably (2.8) is sharp when t is large. As an example of (2.8), take $r = 1$, $2b = 2^e$; also assume for simplicity that $e + 4 = 2^t$. Then $z = 2^t - 2t - 1$ and (2.8) reduces to

$$B_{2a} \equiv B_{2a+2b} \pmod{2^z} \qquad (2a \geq e + 2).$$

3. It is clear from (1.6) that the number C_{2a-1} is exactly divisible by 2^{2a-k-1}, where $2^k \mid 2a$, $2^{k+1} \nmid 2a$. Consider the number

$$C'_{2a-1} = 2^{2-2a}\, a\, C_{2a-1} = 2(1 - 2^{2a})\, B_{2a}, \tag{3.1}$$

which is evidently an odd integer. Indeed it follows from (2.9) that

$$C'_{2a-1} \equiv 1 \pmod 4. \tag{3.2}$$

We get, using (3.1),

$$C'^{2a-1}(1 - C'^{2b})^r = 2B^{2a}(1 - B^{2b})^r - 2^{1+2a} B^{2a}(1 - 2^{2b} B^{2b})^r.$$

Since

$$2^{1+2a} B^{2a}(1 - 2^{2b} B^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{2a}},$$

we may apply Theorem 2 to get the following.

Theorem 3. *With the notation of Theorem 2, we have*

$$C'^{2a-1}(1 - C'^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{z+1}}. \tag{3.2}$$

4. The numbers [4, p. 28]

$$D_n = (2B + 1)^n = (2 - 2^n) B_n \tag{4.1}$$

vanish for n odd, while for n even both numerator and denominator are odd. Moreover by (2.8) we have

$$D_{2a} \equiv 1 \pmod 4, \tag{4.2}$$

which holds for all $a \geq 0$. Thus it is obvious that

$$D^{2a}(1 - D^{2b})^r \equiv 0 \pmod 4 \quad (r \geq 1).$$

This can easily be improved by using the first of (4.1); indeed it follows from

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = (2B+1)^{2a}\{1-(2B+1)^{2b}\}^r$$
$$= (2B+1)^{2a}\{-2b(2B)-\binom{2b}{2}(2B)^2+\dots\}^r$$

that

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{re+r-1}}, \tag{4.3}$$

where $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ and $a \geq 0$.

To further improve (4.3), we note that (4.1) implies

$$D^2 = 1 + 4B(B+1),$$

so that

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = (1+4B(B+1))^a\{1-(1+4B(B+1))^b\}^r$$
$$= -(1+4B(B+1))^a\{\sum_{j=1}^{b}\binom{b}{j}4^jB^j(B+1)^j\}^r.$$

This yields

$$D^{2a}(1-D^{2b})^r = 2^{re+r}\sum_{j=r}^{R}A_jB^j(B+1)^j, \tag{4.4}$$

where the A_j are integers and R is a certain integer whose precise value is immaterial. Note incidentally that

$$4^rB^r(B+1)^r = (D^2-1)^r. \tag{4.5}$$

We now again use (2.1) to get

$$B^n(B+1)^n = \sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}s^n(s+1)^n \tag{4.6}$$
$$= 2^n\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}(\tfrac{1}{2}s(s-1))^n.$$

Evidently the highest power of 2 occuring in the denominator of the extreme right member of (4.6) is $2^{e'}$, where

$$2^{e'} \leq 2n < 2^{e'+1}.$$

Therefore

$$B^n(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^{e'+1}}. \tag{4.7}$$

We can refine (4.7) somewhat. For even $n > 2$, we have

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}(\tfrac{1}{2}s(s-1))^n \equiv \sum_{s\equiv 1,\,2 \pmod 4}(-1)^s\binom{k}{s} \pmod 8.$$

A little computation leads to

$$\sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} \equiv 0 \pmod 8$$

for $k \equiv 3 \pmod 4$. For $k \equiv 1 \pmod 4$; $k+1$ is divisible only by 2; even k may of course be ignored. Hence it follows that the denominator of

$$\frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (\tfrac{1}{2} s(s+1))^n$$

is divisible by at most

$$2^{\max(1, e'-3)}. \tag{4.8}$$

When n is odd and ≥ 3, we have

$$\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (\tfrac{1}{2} s(s+1))^n \equiv \tfrac{1}{2} \sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} s(s+1) \pmod 8.$$

As above it can be verified that

$$\tfrac{1}{2} \sum_{s \equiv 1, 2 \pmod 4} (-1)^s \binom{k}{s} s(s+1) \equiv 0 \pmod 8$$

for $k \equiv 7 \pmod 8$. Thus we find that (4.8) applies for n odd also. Consequently in place of (4.7) we have

$$B^n(B+1)^n \equiv 0 \pmod{(2^{n-1}, 2^{n-e'+3})} \tag{4.9}$$

Since the exponent $n - e'$ is a non-decreasing function of n, it follows from (4.4) and (4,9) that

$$D^{2a}(1 - D^{2b})^r \equiv 0 \pmod{2^{re+r+\min(r-1,\, r-r'+3)}}. \tag{4.10}$$

Where r' is defined by

$$2^{r'} \leq 2r < 2^{r'+1}. \tag{4.11}$$

This completes the proof of

Theorem 4. *Let* $2^e \mid 2b$, $2^{e+1} \nmid 2b$ *and define* r' *by means of* (4.11). *Then* D_n *satisfies* (4.10) *for all* $a \geq 1$, $r \geq 1$.

The congruences (4.7) and (4.9) may be compared with (2.8). Exactly as in the proof of (4.7) we can show that

$$B^a(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^{n-e'}} \qquad (a \geq n) \tag{4.12}$$

where now

$$2^{e'} \leq a + n < 2^{e'+1}$$

If a is comparitively large, we can improve (4.10) pretty much as in the proof of Theorem 2. We find that

$$B^a(B+1)^n \equiv 0 \pmod{2^z} \quad (a \geq n), \tag{4.13}$$

where

$$z = 2^t - 2t - 1, \quad 2^t \leq n + 2.$$

References

1. *P. Bachmann*, Niedere Zahlentheorie vol. 2, Leipzig, 1910.
2. *G. Frobenius*, Über die Bernoullischen Zahlen und die Eulerschen Polynome, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. (1910), pp. 809—847.
3. *N. Nielsen*, Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923.
4. *N. E. Nörlund*, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, 1924.
5. *M. A. Stern*, Zur Theorie der Eulerschen Zahlen, J. reine angew. Math., vol. 79 (1875), pp. 67—98.

Duke University.

Buchbesprechungen

Mathematische Werke. Von *E. Hecke.* (Herausgegeben im Auftrag der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.) 955 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1959. Geb. DM 70.—.

Die Göttinger Akademie der Wissenschaften hat in dem vorliegenden Band in begrüßenswerter Weise die Abhandlungen von *E. Hecke* herausgegeben. Dafür ist die mathematische Fachwelt der Akademie zu größtem Dank verpflichtet. Haben ja doch die Abhandlungen auch jetzt noch das größte aktuelle Interesse.

Die Abhandlungen wurden von den Herren *M. Deuring, W. Maak, H. Petersson* und *B. Schoeneberg* mit Bemerkungen und Berichtigungen versehen. Eine Würdigung des Werkes, von *C. L. Siegel*, und die Übersetzung der Gedächtnisrede von *J. Nielsen* leiten die Ausgabe ein. *E. Hlawka*, Wien

Grundzüge der theoretischen Logik. Von *D. Hilbert* † und *W. Ackermann.* (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 27.) Vierte Auflage. VIII, 188 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1959. Brosch. DM 33.—; Gzln. DM 36.60.

Die neue Auflage hat gegenüber der letzten zahlreiche Änderungen, speziell auch in der Symbolik, Erweiterungen und Zusätze erfahren; so ist ein Kapitel über den intuitionistischen Aussagenkalkül und eines über die strenge Implikation dazugekommen. Auch in dieser Auflage haben wir wieder die beste Einführung in das Gebiet vor uns. *H. Hornich*, Wien

Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Von *R. Carnap*, bearbeitet von *W. Stegmüller.* VIII, 261 S. Wien: Springer-Verlag. 1959. Geb. S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60, £ 2/14/6.

Die von *Carnap* entwickelte Theorie der Induktion und der Wahrscheinlichkeit ist hier aus Originalarbeiten sowie seinem Buche „Logical Foundations of Probability" von *Stegmüller* bearbeitet sowie mit einer Einleitung über die Carnapsche Theorie versehen worden. Das Buch zerfällt in zwei deutlich getrennte Teilabschnitte. Der erste Teil erörtert die philosophische Problematik der Induktion und der Wahrscheinlichkeit. Jedes induktive Schließen ist ein Schließen auf Grund von Wahrscheinlichkeit, so daß die Wahrscheinlichkeitslogik mit der induktiven Logik zusammenfällt. Die Wahrscheinlichkeit wird als logische Relation zwischen einer Hypothese und gegebenen Prämissen betrachtet. Dabei wird die induktive Wahrscheinlichkeit von einer statistischen Wahrscheinlichkeit getrennt, welche letztere eine quantitativ faßbare Erfahrungstatsache physikalischer Systeme darstellt und in engem Zusammenhang zur relativen Häufigkeit steht. Dieser zweite Wahrscheinlichkeitsbegriff ist als Grundlage der induktiven Logik unbrauchbar.

Das zweite Ziel des Buches ist der Aufbau eines Systems der induktiven Logik, welches mit Hilfe der Methoden der symbolischen Logik und Semantik

konstruiert wird; dieses System ist jedoch noch nicht so weit, um den gesamten Wissenschaftsbereich zu erfassen.

Die induktive Logik und das induktive Schließen stellt die Grundlage jeder erfahrungswissenschaftlicher Arbeit dar. Der Aufbau eines Systems der induktiven Logik, die natürlich in keiner Weise den „wissenschaftlichen Instinkt" und andere nicht rationale Faktoren der Erkenntnisgewinnung ersetzen kann und soll, dient zur Klärung des Bestätigungsgrades bestehender Hypothesen auf Grund gegebener Daten. Dadurch wird nicht zuletzt in der Statistik eine wesentliche Klärung der Grundbegriffe erreichbar sein. *H. Brauner*, Wien

Axiomatic Set Theory. Von *P. Bernays*, mit einer historischen Einleitung von *A. A. Fraenkel*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) VIII, 226 S. Amsterdam: North Holland Publishing Co. 1958, hfl. 22.50.

Das vorliegende Werk besteht aus zwei Teilen. Der erste, einführende Teil von *A. A. Fraenkel* gibt eine kurze und prägnante Übersicht über die geschichtliche Entwicklung der axiomatischen Methoden der Mengenlehre unter besonderer Berücksichtigung der Axiomatik *Zermelos*. Die Erweiterungen und Umformungen, die die Theorie in den Händen von *Fraenkel*, *von Neumann*, *Quine* und *Bernays* erfahren hat, werden charakterisiert. Der Problematik des Auswahlaxioms, das ja in vielen Zweigen der Mathematik eine wichtige Rolle spielt und oft zu merkwürdigen Resultaten führt, ist ein kurzer Abschnitt gewidmet. Das Unendlichkeitsaxiom sowie einige weitere Axiome (Axiom der Ersetzbarkeit und Fundierung) werden kurz besprochen, das *Gödel*sche Resultat über die Verträglichkeit der Kontinuumshypothese mit gewissen Axiomensystemen wird diskutiert. Der einführende Teil schließt mit einer kurzen Besprechung der Axiomensysteme von *Bernays*, *Gödel* und *von Neumann*. Der zweite Teil von *P. Bernays* ist der Axiomatik der Mengenlehre gewidmet und trägt enzyklopädischen Charakter. Er ist die Frucht der Arbeiten des Autors, die in den Jahren von 1937 bis 1954 im Journal of Symbolic Logic erschienen sind. Gegenüber den genannten Arbeiten ist jedoch hier die Formalisierung des Systems weit mehr vorangetrieben. Das erste Kapitel beschreibt den formal-logischen Rahmen, in dem sich die folgenden Ausführungen bewegen; es führt in den Prädikaten- und Klassenkalkül ein und erläutert den Begriff der Paarklassen. Die eigentliche mengentheoretische Axiomatik beginnt mit dem 2. Kapitel. Es werden drei logische Konstanten benützt und drei charakterisierende Axiome (A_1 bis A_3) eingeführt; die eine dieser logischen Konstanten spielt die Rolle der Nullmenge; sie wird in A_1 axiomatisch charakterisiert. Das Aussonderungsaxiom *Zermelos* und das Ersetzungsaxiom *Fraenkels* sind auf Grund der Axiome beweisbare Sätze. Das 3. Kapitel behandelt die Theorie der Ordinalzahlen, natürlichen Zahlen und der endlichen Mengen. Die Definition der Ordinalzahlen geschieht ohne Verwendung des Begriffs der Ordnungstype. Das allgemeine Rekursionstheorem (*von Neumann*) wird im 4. Kapitel bewiesen. Es wird zur Einführung der Funktionen von Ordnungszahlen benützt und dient als Basis zur Behandlung der transfiniten Rekursion. Das 5. Kapitel behandelt die Begriffe der Mächtigkeit, Ordnung und Wohlordnung von Mengen. Bis hierher werden nur die Axiome A_1 bis A_3 benützt. Erst im 6. Kapitel werden das Axiom der Potenzmenge, das Unendlichkeitsaxiom sowie das Auswahlaxiom eingeführt und deren verschiedene Formulierungen (Lemma von *Zorn*) untersucht. Das folgende Kapitel ist den Anwendungen gewidmet: Theorie der reellen Zahlen, Kardinalzahlarithmetik und abstrakte Theorien (Gruppentheorie, Topologie, usw.). Das abschließende

Kapitel behandelt weitere Verschärfungen des Axiomensystems (Fundierungsaxiome, Auswahlaxiome).
J. Roppert, Wien

Notices d'Histoire des Mathématiques. Von *H. Lebesgue*. (Monographies de L'Enseignement Mathématique: No. 4.) Mit 3 Textabb., 116 S. Genève: Institut de Mathématiques, Université. 1958. sfr. 16.—.

Diese Monographie enthält eine nicht veröffentlichte Studie über das Lebenswerk von *Vieta*, eine Würdigung der mathematischen Leistungen von *Vandermonde*, eine Darstellung des Lebens und der Arbeiten von *Camille Jordan*, eine Notiz über *Baire*, einen Bericht über eine Arbeit von *Ampère*, *Lebesgues* Antrittsrede im Collège de France, wo er insbesondere die Leistungen von *Humbert*, *Jordan*, *Liouville*, *Lacroix*, *Ramus* und *Roberval* würdigt, ferner Auszüge aus seinen Briefen. *Lebesgue* wollte nie als mathematischer Historiker gelten, aber er hatte das Bestreben, bei tragenden Ideen die Verwandtschaft im Denken alter und neuer Forscher sich zu vergegenwärtigen, und gerade durch dieses Bestreben gelang es ihm, besonders Anregendes und Fesselndes zu bieten. Und so liefert diese kleine Schrift nicht nur einen interessanten Einblick in das Lebenswerk der genannten Mathematiker, sondern man wird durch die Art der Darstellung von der so tief veranlagten Persönlichkeit *Lebesgues* stark beeindruckt. Ein besonders schöner Satz, der sich in einem Brief findet, sei hier wiedergegeben: „... la vérité ne brille qu'aux yeux qui l'ont longtemps cherchée; assez longtemps pour avoir mérité de la voir." Hervorgehoben sei noch: die feinsinnige Zusammenstellung dieser kleinen Schrift und insbesondere auch das Vorwort lassen die tiefe Verehrung eines dankbaren Schülers für seinen großen Lehrer deutlich erkennen.
P. Funk, Wien

Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik. Von *J. E. Hofmann*. (Monographies de l'Enseignement Mathématique: No. 3.) 126 S. Genève: Institut de Mathématiques, Université. 1957. sfr. 15.20.

Die vorliegende Studie wurde durch Herrn *Spieß*, Basel, angeregt, der in mühsamer Kleinarbeit alles bisher über *Jakob Bernoulli* Bekannte, insbesondere nur handschriftlich vorliegendes Material, für die von ihm unternommene große *Bernoulli*-Edition vorbereitet hat. Die Studie stützt sich auf dieses Material und sucht so die großartigen Leistungen *Jakob Bernoullis* für die Entwicklung der Infinitesimalmathematik dem Verständnis näher zu bringen. Dem Verfasser gelingt es vor allem auch durch seine so überaus gründliche Kenntnis der Vorgeschichte und Frühgeschichte der Infinitesimalrechnung, einen Einblick in den wissenschaftlichen Werdegang *Bernoullis* zu geben, der zunächst scholastischer Theologe, dann („invito patre sidera adversus") Astronom und schließlich der große, scharfsinnige Mathematiker wurde. Diese Schrift enthält auch eine Darstellung des berühmten Streites mit seinem Bruder *Johann* im Anschluß an die Entstehung der Variationsrechnung. Ganz besonders wertvoll sind für den mathematischen Historiker die überaus reichhaltigen Literaturangaben.
P. Funk, Wien

Introducing Mathematics. Von *F. F. Helton*. Zweite Auflage. Mit 202 Textabb., XV, 396 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 5.75.

Dieses Buch behandelt ausführlich, wenn man vom Kapitel über quadratische Gleichungen absieht, den Lehrstoff der Mathematik, der an der Unterstufe unserer

Mittelschulen gelehrt wird. Zahlreiche Musterbeispiele und viele Übungsbeispiele bereichern das Buch. *J. Laub*, Wien

Vollständige Anleitung zur Algebra. Von *L. Euler*. Unter Mitwirkung von *J. Niessner* in revidierter Fassung neu herausgegeben von *J. E. Hofmann*. 571 S. Stuttgart: Reclam-Verlag. 1959. DM 18.50.

Das klassische Werk von internationalem Ruf liegt nun in einer revidierten Neuausgabe vor. Das Wiedererscheinen dieses Buches wird insbesondere in den Bibliotheken willkommen sein, da die alten Exemplare schon lange abgenützt und beschädigt sind. *J. E. Hofmann* hat die Neuauflage mit einer biographisch-wissenschaftlichen Einleitung versehen. Er gibt Rechenschaft über die wissenschaftlichen Grundsätze dieser Neuauflage. Das Buch hat in erster Linie historisches Interesse. Es gibt aber auch heute noch einen leicht verständlichen Zugang in die Algebra und die Theorie der diophantischen Gleichungen. Vor allem wird algorithmisches Rechnen betrieben, das *Euler* in vollendeter Meisterschaft handhabte. *N. Hofreiter*, Wien

The Theory of Groups. Von *H. Zassenhaus*. Zweite Auflage. X, 265 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1958. Geb. DM 26.—.

Die erste Auflage erschien 1937 und wurde in dieser Zeitschrift Mh. Math. **46**, 15—16 (1938) ausführlich besprochen. Mit diesem Buch erschien ein sehr bedeutungsvolles Lehrbuch der Gruppentheorie, das die damals neuen Methoden und Ergebnisse einheitlich darstellte. Eine englische Übersetzung erschien 1949. Die zweite Auflage (vorläufig nur in englischer Sprache) unterscheidet sich von der ersten hauptsächlich durch Zusätze zu einzelnen Kapiteln, die größtenteils im Anhang gebracht werden, insbesondere durch eine Einführung in die Theorie der Gitter. Die Übungsaufgaben wurden bedeutend vermehrt, und das Literaturverzeichnis wurde wesentlich erweitert. Auch die zweite Auflage ist allen in der Algebra einigermaßen vorgebildeten Lesern außerordentlich zu empfehlen. *N. Hofreiter*, Wien

Grundzüge der Algebra. Teil II: Allgemeine Ring- und Körpertheorie. Von *H. Lugowski* und *H. J. Weinert*. (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: Band 10.) 250 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. DM 11.—.

Band II handelt von algebraischen Strukturen mit zwei aufeinander bezogenen Verknüpfungen, zu denen die Ringe gehören. Je nach der Auswahl der geforderten Eigenschaften unterscheiden wir Schiefringe, kommutative Ringe, Schiefkörper und kommutative Körper. Aus einfachen Ringen werden weitere Ringe konstruiert. Insbesondere erweist sich die Adjunktion von Unbestimmten als wichtiges Hilfsmittel für Ringerweiterungen. Einen breiten Raum nehmen algebraische Strukturen mit Operatorbereichen ein. Verbindung zur Zahlentheorie bringt die Teilbarkeitslehre, die Zerlegung in Primelemente und die Einführung der Ideale. Heute ist die Idealtheorie, die ursprünglich in der algebraischen Zahlentheorie eingeführt wurde, eine selbständige mathematische Disziplin geworden, die in verschiedenen Gebieten Anwendung gefunden hat. Die Darstellung ist vorbildlich klar und gut verständlich, genau so wie im 1. Teil (siehe die Besprechung in Monatsh. f. Math. **62**, 179, 1958).

N. Hofreiter, Wien

Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Von *W. Specht.* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen: Band I: Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil: A. Grundlagen, B. Algebra, Heft 3/II.) Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. 76 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Brosch. DM 19.—.

Aufgabe dieses Artikels ist, die Entwicklung und die Ergebnisse der analytischen Theorie der Polynome zusammenfassend darzustellen. Dazu gehört als Hauptproblem die Nullstellenverteilung eines Polynoms $f(z)$ in der Zahlenebene. Die Bemühungen um dieses Hauptproblem haben zu folgenden Untersuchungen geführt: 1. der Nachweis der Existenz der Nullstellen, worüber der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra Auskunft gibt. Eine weitere Aufgabe ist 2. die Abgrenzung von Gebieten der Zahlenebene, die alle Nullstellen oder allgemeiner eine vorgeschriebene Mindestanzahl von Nullstellen eines Polynoms enthalten. Dazu gehören Schrankensätze, insbesondere die Ermittlung einer oberen Schranke für den absoluten Betrag der Nullstellen. Als Umkehrung zum Problem 2. tritt 3. die Aufgabe, die genaue Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem vorgegebenen Gebiet zu ermitteln. Ein weiteres Problem ist: 4. Aus der Verteilung der Nullstellen vorgegebener Polynome sind Aussagen über die Verteilung der Nullstellen eines anderen Polynoms zu gewinnen, dessen Koeffizienten Funktionen der Koeffizienten der vorgegebenen Polynome sind.

Der Artikel gibt eine klare und zuverlässige Übersicht über die in der analytischen Theorie der Polynome auftretenden Probleme und Ergebnisse.

N. Hofreiter, Wien

Zahlentheorie. Teil II. Von *L. Holzer.* (Mathematisch-naturwissenschaftliche Bibliothek: 14.) V, 127 S. Leipzig: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1959. Geb. DM 9.—.

Teil I brachte eine Einführung in die elementare und in die algebraische Zahlentheorie (Rezension in Mh. Math. **63**, 193 (1959)). Teil II enthält die Weiterführung der algebraischen Zahlentheorie. Es werden gebracht: Theorie der Einheiten, Körperdifferente, Relativdiskriminante, Relativdifferente, Relativgaloissche Körper, Zerlegung von Idealen, Klassenzahl und Einheitenhauptgeschlecht. Wie im Band I wird auch hier die moderne abstrakte Algebra weitgehend angewandt. Manche Beweise wurden neu gestaltet. Teil I und II geben eine gute Einführung in die algebraische Zahlentheorie und bieten eine solide Grundlage allen jenen, die später Klassenkörpertheorie studieren wollen.

N. Hofreiter, Wien

Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Von *M. Deuring.* (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen: Band I: Algebra und Zahlentheorie, 2. Teil: C. Reine Zahlentheorie, Heft 10/II.) Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. 60 S. Stuttgart: B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft. 1958. Brosch. DM 15.—.

Das lang erwartete Heft ist endlich erschienen, gab es doch keine moderne Darstellung der Theorie der komplexen Multiplikation. Durch dieses Heft wird die Theorie einem weiten mathematischen Leserkreis bequem zugänglich gemacht, vor allem deshalb auch, weil zu den Sätzen auch die Beweise — wenn auch in knapper Form — gegeben werden. Es ist dem Verfasser, der selbst Bedeutendes zur Theorie beigetragen hat, in meisterhafter Weise gelungen, in engem Rahmen eine moderne aber klare Darstellung zu geben. *E. Hlawka.* Wien

Approximate Methods of Higher Analysis. Von *L. V. Kantorovich* und *V. I. Krylov*. Nach der 3. russ. Auflage ins Englische übersetzt von *C. D. Benster*. Mit 68 Textabb., XV, 681 S. Groningen: P. Noordhoff. 1958.

Ich verweise auf meine ausführliche Besprechung des Buches (in deutscher Übersetzung) in dieser Zeitschrift, **61**, 84 (1957). *N. Hofreiter*, Wien

Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales. Band II. Von *L. Robin*. (Collection Technique et Scientifique du Centre National d'Études des Télécommunications.) Mit 34 Textabb., VIII, 384 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. Brosch. fr. 5000.—; kart. fr. 5300.—.

Der zweite Band dieses neuen Buches über Kugelfunktionen beginnt mit einer Einführung der zugeordneten Funktionen P_n^m und Q_n^m für beliebige Werte von n und m, ihrer Darstellung mittels hypergeometrischer Funktionen und ihrer Entwicklungen in Potenzreihen nach verschiedenen Variablen. Es folgen mannigfache Beziehungen, die zwischen diesen Funktionen bestehen, sowie zahlreiche Integraldarstellungen. Ferner werden verschiedene Typen von Integralen, in deren Integrand die obigen Funktionen vorkommen, und Beziehungen zu den Besselfunktionen behandelt. Das nächste Kapitel ist den asymptotischen Entwicklungen gewidmet, welche wieder mit großer Ausführlichkeit für alle Bereiche der Variablen und Parameter diskutiert werden, Entwicklungen, die mit den Namen *Laplace*, *Heine*, *Darboux*, *Stieltjes*, *Hille*, *Hobson*, *Barnes* u. a. verbunden sind. Hier finden sich auch interessante Ungleichungen, denen die genannten Funktionen genügen. Der dritte Teil des vorliegenden Bandes ist der Untersuchung der Konvergenz und Summierbarkeit der *Legendre*schen und *Laplace*schen Reihe gewidmet. Sehr gründlich werden die verschiedenen Bedingungen für die Konvergenz und die C_k-Summierbarkeit untersucht, stetige Funktionen mit divergenter Reihe angegeben, die Äquikonvergenzsätze bewiesen, und anderes mehr. Z. B. sei noch auf die Entwicklungen hingewiesen, die nach Funktionen nicht ganzzahliger Ordnung fortschreiten. Alles in allem wird auch dieser zweite Band dazu beitragen, daß das Buch ein guter Ratgeber für jeden ist, der mit Kugelfunktionen arbeitet, und eine schöne Lektüre für den Liebhaber.

K. Prachar, Wien

Statistics — An Introduction. Von *D. A. S. Fraser*. (A Wiley Publication in Mathematical Statistics.) Mit 45 Textabb., IX, 398 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958. $ 6.75.

Der Zweck des Buches ist, den Studierenden eine solide Einführung in die mathematische Statistik zu geben. Da die Statistik auf der Wahrscheinlichkeitstheorie beruht, so werden zunächst die einfachsten Begriffe und Sätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie gebracht. Dies gelingt bereits durch Betrachtung von ganz einfachen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Dann folgen die grundlegenden Sätze über diskrete und über stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen und als wichtigste Beispiele werden die Binomial-, die Poisson- und die Normalverteilung gebracht. Mittelwerte, Streuungen und Momente von Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschließen die Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie. Nun kommen Stichproben aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Mittelwerte, Streuungen und andere Charakteristiken von Stichprobenverteilungen und das Gesetz der großen Zahlen. Es folgen Verteilungen von zufälligen Variablen, die durch Transformation, insbesondere durch orthogonale Transformation aus zufälligen Variablen hervorgehen und speziell die χ^2-, die F- und die t-Verteilung.

Dann werden Methoden entwickelt, um die in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen auftretenden Parameter zu schätzen, wozu insbesondere die Maximum-Likelihood-Methode gehört. Noch wichtiger ist die Aufstellung von Konfidenzintervallen, das Prüfen von Hypothesen, wobei der χ^2-Test besonders vorteilhaft ist. Die weiteren Kapitel handeln von der Analyse linearer Modelle, von Regressions- und Kovarianzanalyse, Varianzanalyse, Methoden zur Planung von Versuchen, Stichprobenkontrolle, Sequentialanalyse und nicht parametrischen Methoden. Das Buch enthält zahlreiche numerische Beispiele und Aufgaben, ferner einige Tabellen, was mit Rücksicht auf die zahlreichen Anwendungen der Statistik sehr wünschenswert ist. Die Darstellung ist für Studierende besonders geeignet. Vieles wird originell durchgeführt. Alles in allem ist es ein Lehrbuch, das bestens empfohlen werden kann. *N. Hofreiter*, Wien

Słownik Polsko-Rosyjsko-Angielski Statystyki Matematycznej. I: Statystycznej kontroli jakości produkcji. Herausgegeben vom Mathematischen Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften. (Zastosowania Matematyki.) 48 S. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe. 1958. zl. 7.—.

Wer die Vielzahl und Vieldeutigkeit der Bezeichnungen in der mathematischen Statistik kennt, wird sich darüber freuen, daß nun dieses kleine Wörterbuch erschienen ist. Es bringt die Übersetzung von 540 polnischen Bezeichnungen ins Russische und Englische. Ein russischer und englischer Index ermöglicht die Rückübersetzung. Es wurden nur rein statistische Ausdrücke übersetzt, und man findet z. B. nicht das Wort „Stochastische Variable" oder „Stationärer Prozeß" oder „Random Noise".

Es wäre zu wünschen, daß dieses Wörterbuch durch Hinzufügen der deutschen Ausdrücke erweitert würde, da gerade im Deutschen die entsprechenden Bezeichnungen leider noch immer recht wenig einheitlich sind. *K. Prachar*, Wien

Elementary Mathematical Programming. Von *R. W. Metzger*. Mit 133 Textabb., IX, 246 S. New York: J. Wiley & Sons, London: Chapman & Hall. 1958.

Ein wichtiger Zweig der Unternehmensforschung ist die Programmierung. Sie besteht, mathematisch betrachtet, in der Aufgabe, das Maximum oder das Minimum einer Funktion in mehreren Variablen zu finden, wenn noch mehrere Nebenbedingungen (meist in Form von Ungleichungen) zu berücksichtigen sind. Das Buch ist für Leser geschrieben, die sehr geringe mathematische Kenntnisse haben und die Methoden der Programmierung kennen lernen wollen. Dementsprechend werden die verschiedenen Methoden an einfachen aber typischen Beispielen dargestellt. Der Autor versucht gar nicht, die Methoden mathematisch zu begründen, da seiner Meinung nach der Leser die Methoden anwenden kann, auch wenn er die Beweise nicht versteht. Das Buch beginnt mit Transport- oder Verteilungsproblemen, bringt dann die Simplexmethode, die die wichtigste Methode der Programmierung ist, und gibt auch einige Approximationsmethoden an. In den späteren Kapiteln wird gezeigt, wie reichhaltig die Menge der Anwendungen ist. Wertvoll für den Leser sind die Zusammenfassungen, in denen die Methoden nochmals kurz und einprägsam dargestellt werden.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Theorie der Spiele. Mit Anwendungsbeispielen, insbesondere aus Wirtschaftslehre und Soziologie. Von *E. Burger*. 169 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1959. Geb. DM 28.—.

Die im Jahre 1928 durch *v. Neumann* begründete Theorie der Spiele hat in den letzten 15 Jahren eine lebhafte Entwicklung durchgemacht. Das vorliegende Buch ist das erste Lehrbuch der Spieltheorie in deutscher Sprache und gibt eine Einführung in die mathematische Seite, während die verschiedenen Anwendungen als Illustration auftreten. Es ist hier nicht die Rede von reinen Glücksspielen, deren Ausgang nur vom Zufall abhängt; es werden „strategische" Spiele betrachtet, deren Ausgang auch von gewissen Entscheidungen abhängt, die die Spieler im Verlaufe einer Partie des Spieles zu fällen haben. Dazu gehören viele Gesellschaftsspiele, aber auch Konkurrenzprobleme, Interessenkonflikte und dergleichen, wie sie in ökonomischen, soziologischen und strategischen Situationen auftreten. Unter der Strategie eines Spieles für ein bestimmtes Spiel versteht man einen vollständigen Verhaltensplan, der für jede mögliche Situation, in die der Spieler im Verlaufe einer Partie gelangen kann, das Verhalten festlegt. Ausgehend von Beispielen von Gesellschaftsspielen und der Ökonometrie wird eine exakte Definition des Spielbegriffes gegeben. Das eigentliche Anliegen der Theorie der Spiele ist das Problem des rationalen oder optimalen Verhaltens in einem Spiel. Dieses Problem ist allerdings im wesentlichen erst für gewisse Zweipersonenspiele (sogenannte Nullsummenspiele) befriedigend gelöst worden. Gut entwickelt ist die Theorie der Matrixspiele. Unter den Verfahren zur Ermittlung von Wert und optimalen Strategien bei Matrixspielen ist das der linearen Programme besonders vorteilhaft. Als allgemeine praktische Lösungsmethode für lineare Programme wird die Simplexmethode gebracht. Wird den Spielern Koalitionsbildung gestattet, so spricht man von einer kooperativen Theorie der Spiele (Kapitel IV), im Gegensatz zur nicht-kooperativen Theorie (Kapitel II). — An Vorkenntnissen verlangt das Buch nicht viel. Auch ist die Darstellung gut verständlich, so daß Studierende der Mathematik in den höheren Semestern das Buch durcharbeiten können. Da für die Theorie der Spiele weitgehendes Interesse vorhanden ist und die Theorie noch sehr im Fluß ist, muß mit einer Neuauflage in wenigen Jahren gerechnet werden. *N. Hofreiter*, Wien

Elementare Informationstheorie. Vom *H. Zemanek*. Mit 28 Textabb., 120 S. Wien-München: R. Oldenbourg. 1959. Geb. DM 14.20; S. 86.—.

Das vorliegende Buch ist aus einer Vorlesung an der Technischen Hochschule in Wien hervorgegangen. Es stellt sich die Aufgabe, die einfachsten und grundlegenden Begriffe der Informationstheorie mit bescheidensten mathematischen Hilfsmitteln einem weiten Leserkreis zugänglich zu machen. Zahlreiche Beispiele aus den verschiedensten Gebieten erläutern die Grundbegriffe, so daß es dem Verfasser gelungen ist, in dem gesteckten Rahmen eine gute Einführung zu geben. Für Dinge, die weitergehende mathematische Hilfsmittel voraussetzen, muß natürlich weitere Literatur herangezogen werden. *E. Hlawka*, Wien

Arbeiten zur Informationstheorie II. Von *I. M. Gelfand, A. M. Jaglom, A. N. Kolmogoroff, Chiang Tse-Pei, I. P. Zaregradski*. (Mathematische Forschungsberichte: VI.) 77 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1958. Brosch. DM 14,40.

Während der erste Band (siehe Besprechung in dieser Zeitschrift Mh. f. Math. 62, S. 270) vor allem der Untersuchung der Entropie gewidmet war, steht jetzt im Vordergrund die Berechnung der sogenannten Information. An der Spitze steht die ausführliche Arbeit von *Gelfand* und *Jaglom*, welche in anschaulicher Weise die Theorie entwickelt und an zahlreichen Beispielen erläutert.

Die weiteren zwei Arbeiten, einerseits von *Gelfand*, *Jaglom* und *Kolmogoroff* und jene von *Chiang Tse-Pei* andererseits, sind der Definition der Information gewidmet. Die letzte Arbeit von *Zaregradski*, auf Anregung von *A. J. Chintschin* verfaßt, liefert eine bedeutende Ergänzung zur Theorie der Entropie und schließt jetzt die Theorie von *Chintschin*, welche im ersten Band behandelt wurde, ab.

Ein hervorragendes Werk, unentbehrlich für jeden, der sich mit der Informationstheorie zu beschäftigen hat! *E. Hlawka*, Wien

Calculateurs Analogiques Répétitifs. Von *R. Tomovic.* (Collection de Monographies de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique.) Mit 94 Textabb., 6 Tab., VIII, 186 S. Paris: Masson et Cie. 1958. fr. 3000.—.

Dieses Buch über Analogrechner ist einerseits für den Laien bestimmt, der gerne einen Einblick in den Aufbau solcher Geräte und die Möglichkeiten ihrer Anwendung erhalten will, andererseits sollen auch dem Fachmann Anregungen für die Konstruktion von Maschinen gegeben werden.

Die drei Hauptabschnitte sind mit Theorie, Konstruktion, Anwendungen überschrieben. Im ersten wird z. B. die Synthese von Schaltungen zur Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen behandelt, wobei immer nur das Blockschema der Schaltung angegeben wird; ferner die Genauigkeit und Stabilität der einzelnen Schaltungsarten. In dem zweiten Hauptteil findet sich eine Diskussion von Einzelheiten der Schaltungen (also der einzelnen „Blöcke" im genannten Schema), welche auch die Angabe technischer Daten (Anodenspannungen der Röhren, Größen der Widerstände und Kondensatoren usw.) einschließt. Besonders seien hier die Schaltungen zur Ausführung nichtlinearer Operationen genannt und die Methoden zur Erzeugung von verschiedenen Arten von speziellen Funktionen. Im letzten Teil finden sich Beispiele über (gewöhnliche) Differentialgleichungen und Integralgleichungen. Die Behandlung dieser Probleme mit der Maschine wird gründlich besprochen und auch numerische Ergebnisse werden angeführt.

Bei der großen Zahl von Büchern über Rechenautomaten, in denen konstruktive Details aus Bequemlichkeit weggelassen sind und Beispiele oft nur unvollständig wiedergegeben werden, ist es besonders zu begrüßen, daß hier ein Buch vorliegt, welches diesen Dingen besondere Aufmerksamkeit widmet, und dies in klarer und verständlicher Darstellung. *K. Prachar*, Wien

Le Bruit de Fond. Von *P. Grivet* und *Au. Blaquière*, Vorwort von *D. Gabor*. (Cours d'Électronique: Band IV.) Mit 246 Textabb., XI, 495 S. Paris: Masson et Cie. 1958. fr. 6500.—.

Die Theorie der zufälligen Störungen hat sich in letzter Zeit sehr schnell zu einem großen Teilgebiet der Elektronik entwickelt. Zur mathematischen Erfassung solcher Vorgänge werden die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt. Dem Mathematiker und Physiker fehlen zum Verständnis dieser Vorgänge oft gewisse Kenntnisse aus der Hochfrequenztechnik, dem Ingenieur fehlen oft die entsprechenden mathematischen Hilfsmittel. Das vorliegende Buch wird von beiden mit Vorteil gelesen werden. Es geht sehr gründlich auf die experimentelle Seite der Rauschvorgänge ein und gibt stets auch Angaben über die Größe der Spannungen, Frequenzen usw. und die Dimensionierung der Schaltelemente. Andererseits werden jedoch auch die mathematischen Hilfsmittel nicht vernachlässigt, und, was besonders wichtig ist, es wird die Theorie mit dem Experiment verglichen.

Kapitelüberschriften: Die experimentellen Aspekte des Phänomens des „Rauschens" und seine Grundgesetze. Das Gesetz von der Gleichverteilung der Energie und das Rauschen von Widerständen. Der *Schrott-* oder *Schottky*-Effekt in den Elektronenröhren. Übertragung des Rauschens in einem passiven oder aktiven linearen Übertragungssystem. Rauschen und Bandbreite. Das Rauschen in Halbleitern. Die „Struktur" des Rauschens und seine mathematische Darstellung. Einige ausgewählte Probleme im nichtlinearen Bereich. Rauschen und Informationstheorie. Anhang: Kurze Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. —

Als Beispiel für die große Menge des verarbeiteten Materials sei z. B. auf die vielen Schaltungen hingewiesen, die auf ihr Verhalten gegenüber zufälligen Spannungen untersucht werden, wie z. B. Gitter- und Anodenbasisschaltungen verschiedener Röhren, mannigfache Arten von Schwingungserzeugern u. a. m. Die Literaturhinweise sind sehr zahlreich und gründlich. Ein reichhaltiges und schönes Buch über ein neues und interessantes Gebiet. *K. Prachar*, Wien

Darstellende Geometrie. Band I. Von *W. Kramer.* (Hochschulbücher für Mathematik: Band 38.) Mit 221 Textabb., VIII, 188 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1959. Geb. DM 12.50.

Dieses zweibändig geplante Lehrbuch der Darstellenden Geometrie ist für Hoch- und Fachschulen bestimmt. Der vorliegende 1. Band bringt vor allem die Normalprojektion sowie die Kegelschnittlehre, während dem 2. Teilband vornehmlich Axonometrie und Perspektive vorbehalten bleibt. Der Autor, der schon 1924 mit *G. Scheffers* zusammen einen bereits mehrfach aufgelegten zweibändigen Leitfaden der Darstellenden Geometrie für höhere Schulen geschrieben hat, entwickelt auch hier zunächst die Normalprojektion auf eine Bildebene ziemlich ausführlich. Nach Besprechung der Grundaufgaben und ihrer Anwendung auf Dachausmittlungen, Böschungsebenen und Sonnenuhren wird auch noch die Eintafelprojektion von Kreiszylinder, Kreiskegel und Kugel besprochen, sowie Anwendungen auf die Erd- und Himmelskunde. Der zweite Abschnitt ist der Normalprojektion auf mehrere Bildebenen gewidmet sowie der Konstruktion von Polyederdurchdringungen. Im letzten Abschnitt schließlich werden die ebenen Schnitte von Drehkegeln und deren Normalprojektion, ebenso Abwicklungen von Drehkegeln und Drehzylindern besprochen. Dabei wird eine überraschende Fülle von Kegelschnitteigenschaften teils durch Betrachtung räumlicher Konfigurationen, teils durch Anwendung elementarer Rechnungen bewiesen; gelegentlich werden auch Eigenschaften der Kegelschnitte aus ihren Gleichungen abgelesen.

Das flüssig und leicht verständlich geschriebene Buch ist mit 221 ausgezeichneten Textfiguren geschmückt. Es kann vor allem Anfängern wärmstens empfohlen werden. *H. Brauner*, Wien

Introduction to Algebraic Geometry. Von *S. Lang.* (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics: Number 5.) XI, 260 S. New York-London: Interscience Publishers. 1958. $ 7.25.

Der Autor selbst sagt im Vorwort, daß er mit diesem Buch nicht nur eine Einleitung in die algebraische Geometrie überhaupt, sondern auch im besonderen eine Einführung in die „Foundations of algebraic geometry" von *A. Weil* geben wolle. Dadurch ist der Charakter des Buches ziemlich eindeutig festgelegt: es behandelt die Theorie algebraischer Gleichungen über einem allgemeinen

Körper beliebiger Charakteristik, sowie deren Lösungsmannigfaltigkeiten in einem darüber liegenden algebraisch abgeschlossenen Körper universeller Natur (universal domain). Vorausgesetzt wird Kenntnis der abstrakten Algebra und etwas Idealtheorie in Noetherschen Ringen, das letzte aber nur in geringem Ausmaß, denn z. B. wird der Lasker-Noethersche Zerlegungssatz, der u. a. im 2. Kapitel nützlich wäre, nicht verwendet. Wichtigste Hilfsmittel beim Aufbau der Theorie sind Körperbewertungen und der Begriff „linear disjoint" von *A. Weil*, der sich als sehr fruchtbar erwiesen hat. Mit besonderer Sorgfalt werden die jeweiligen Änderungen der Verhältnisse studiert, die sich bei Erweiterungen des Grundkörpers ergeben. Die Untersuchungen konzentrieren sich um die Begriffe: algebraische Mannigfaltigkeit, Korrespondenz, normale Mannigfaltigkeit und einfacher Punkt (nach *Zariski*), Divisoren und lineare Scharen, Differentialformen, Gruppenmannigfaltigkeit, Riemann-Rochscher Satz und Jacobische Mannigfaltigkeit. Die letzten Kapitel dienen zur Vorbereitung auf das Buch über Abelsche Mannigfaltigkeiten, das derselbe Verf. in der gleichen Sammlung (Nr. 7) vor kurzem veröffentlicht hat.

Es ist hervorzuheben und voll anzuerkennen, daß es dem Verf. gelungen ist, eine klare und verständliche Einführung in ein sonst schwer zugängliches Forschungsgebiet zu schreiben; dabei konnten viele Begriffe und Beweise beträchtlich vereinfacht werden. Jedem Kapitel sind Literaturangaben beigefügt, die auf Originalarbeiten und weitergehende Untersuchungen hinweisen. Andererseits aber scheint alles vermieden zu sein, was nicht in den orthodoxen Rahmen paßt; sonst könnte man z. B. annehmen, daß die Theorie der Hilbertfunktion und der Syzygien, gerade weil diese für beliebige Grundkörper gelten, in einer Einführung nicht ganz unerwähnt bleiben dürften. Auch wären gelegentliche konkrete Beispiele wertvoll, um abstrakt eingeführte Begriffe aufzufüllen und das Interesse zu beleben, das sonst für eine sich gegenüber allen Beziehungen und Anwendungen abkapselnde Theorie allmählich erlahmen könnte.

W. Gröbner, Innsbruck

Guide to the Literature of Mathematics and Physics Including Related Works on Engineering Science. Von *N. G. Parke III*. Zweite Auflage. Mit 6 Textabb., XVIII, 436 S. New York: Dover Publications. 1958. $ 2.49.

Die erste Auflage erschien 1947. Seither sind mehr als 2500 Bücher über Mathematik und Physik erschienen. Daher war eine zweite Auflage notwendig geworden, und nun ist das Buch natürlich viel umfangreicher geworden. Für jeden Wissenschaftler treten oft die Fragen auf: Was ist über ein Spezialgebiet bekannt und wo findet man das Gesuchte? Daher wird jeder gerne zu einem Buch greifen, das wie das vorliegende umfangreiche Auskunft erteilt. Jeder Zweig der Mathematik und der Physik wird ausführlich dargestellt, wobei die angewandte Mathematik besonders betont wird. Der erste Teil des Buches (ca. 75 Seiten) bringt allgemeine Betrachtungen über das Lesen und Studieren von Büchern und über das Aufsuchen der Literatur. Der zweite Teil (ca. 350 Seiten) enthält ein Verzeichnis der Lehrbuchliteratur über Mathematik, Physik und einige Randgebiete. Der ganze Stoff wird in 120 Teilgebiete zerlegt und fast jedes Teilgebiet weiter unterteilt. Jeder kleine Abschnitt beginnt mit einer kurzen Einführung zur besseren Orientierung. Die dann folgenden Zitate werden ausführlich angegeben, also: Autor, Titel des Buches, Verlag, Erscheinungsjahr und Seitenzahl. Den Abschluß bilden ein Autorenverzeichnis (40 S.) und ein Sachverzeichnis (14 S.). Wenn auch trotz der Fülle des Gebotenen Vollständigkeit nicht erreicht wurde, die Anzahl der Druckfehler sehr groß ist, so ist doch

der 2. Teil eine sehr nützliche Hilfe für alle Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Richtigstellung zu Seite 71: Das Zentralblatt für Mathematik erscheint wieder seit 10 Jahren im Springer-Verlag (Berlin). *N. Hofreiter*, Wien

Les Problèmes aux Limites de la Physique Mathématique. Introduction à leur étude générale. Von *H. G. Garnir*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe: Band 23.) Mit 5 Textabb., 234 S. Basel-Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 1958. Geb. sfr. 29.—.

Der Verfasser behandelt in diesem Buch die allgemeine Dirichlet-Neumannsche Randwertaufgabe für die Wellengleichung und Wärmeleitungsgleichung und ebenso für den metaharmonischen Operator $-\Delta + z$, wobei z weder reell negativ noch 0 ist, Δ der Laplacesche Ausdruck. Zu diesem Problemkreis hat ja der Verfasser Bedeutendes beigetragen. Er behandelt das Problem gleich für den n-dimensionalen Fall in größter Allgemeinheit und Strenge und zwar unter Verwendung der modernsten Methoden der Funktionalanalyse. Daher ist dem eigentlichen Problem eine Theorie des Hilbertschen Raumes vorangestellt. Die Theorie der Distributionen steht natürlich im Mittelpunkt. Die Darstellung ist konzis, aber doch an jeder Stelle klar. Jeder Mathematiker, der sich mit Randwertaufgaben zu beschäftigen hat und die modernen Methoden kennen lernen will, wird dieses Buch studieren müssen. *E. Hlawka*, Wien

Anwendung von Rechenmaschinen bei der Berechnung von Regelvorgängen. Vorträge, gehalten bei einer Tagung des Fachausschusses Regelungsmathematik der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM) in Düsseldorf am 8. XI. 1957, zusammengestellt von *W. Oppelt*. (Beihefte zur Regelungstechnik.) Mit 121 Textabb., 128 S. München: R. Oldenbourg. 1958. Geb. DM 16,80.

Die Vorträge handeln von mathematischen und gerätetechnischen Problemen, die beim Einsatz von Analogrechnern und von Digitalgeräten bei der Lösung von regelungstechnischen Problemen auftreten. Sie wurden von folgenden Herren gehalten:

1. *E. Bukovics* (Wien): Einsatzmöglichkeiten kleiner elektronischer Ziffern-Rechengeräte zur Lösung von Grundaufgaben der Regelungstechnik. 2. *J. B. Reswick* (Cambridge, USA): A simple graphical method for deconvolution. 3. *A. Leonhard* (Stuttgart): Ein Rechengerät für Polynome. 4. *R. Herschel* (Ulm): Zum Entwurf von Analogrechenschaltungen für regelungstechnische Probleme. 5. *O. Föllinger* und *G. Schneider* (Frankfurt am Main): Vergleich der Berechnung eines Regelvorganges mittels Rechenanlagen verschiedener Typen. 6. *E. Bühler* (Mannheim): Über das mechanische System mit Reibung und seine elektronische Nachbildung. 7. *H. Witsenhausen* (Brüssel): Anwendung von Analogierechenmaschinen auf die Optimierung von unstetigen Regelkreisen mit statistisch schwankenden Eingangsgrößen. *N. Hofreiter*, Wien

Journal of the Association for Computing Machinery. Band 6, Nr. 1. 1959. Herausgegeben von Association for Computing Machinery. Erscheint viermal jährlich (Januar, April, Juli, Oktober). Baltimore: Mt. Royal & Guilford Aves. Einzelheft $ 2.50.

Die Zeitschrift ist bereits gut eingeführt. Sie bringt einschlägige Abhandlungen, die auf hohem Niveau stehen und für angewandte Mathematiker, Ingenieure und Physiker von großem Interesse sind. Außerdem enthält jedes Heft

Buchbesprechungen. In dem vorliegenden Heft möchte ich besonders die Arbeit: "The Jacobi Method for Real Symmetric Matrices" von *H. H. Goldstine, F. J. Murray* und *J. v. Neumann* hervorheben. *N. Hofreiter*, Wien

Annales de l'Association Internationale pour le Calcul Analogique. — Proceedings of the International Association for Analog Computation. Publication Trimestrielle. Band I, Nr. 2 (September 1958). Herausgegeben von l'Association Internationale pour le Calcul Analogique. Bruxelles: Presses Académiques Européennes.

Das wissenschaftliche Komitee dieser Zeitschrift besteht aus Professoren aus Belgien, Deutschland, England, Frankreich, Holland, Jugoslawien, Spanien und USA. Die Zeitschrift enthält 1. einige interessante kurze Arbeiten über das Rechnen mit Analogiegeräten und über Beziehungen zu Methoden der praktischen Mathematik, 2. eine Information, und zwar kurze Berichte aus verschiedenen Ländern, 3. eine bibliographische Chronik, das ist eine Angabe von einschlägigen Büchern und Abhandlungen, teilweise mit kurzen Inhaltsangaben, 4. einen Auszug der in 1. erwähnten Arbeiten und 5. Mitteilungen der Association.

N. Hofreiter, Wien

Elementare Mechanik vom höheren Standpunkt. Von *L. Föppl.* Mit 71 Textabbildungen und 8 Bildtafeln. 174 S. München: R. Oldenbourg. 1959. Geb. DM 20.—.

Der Vorlesungszyklus des berühmten Göttinger Mathematikers *Felix Klein* enthielt auch eine Vorlesung „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt", die den Zweck hatte, den fortgeschrittenen Studierenden die Elementarmathematik von einem höheren Standpunkt aus darzulegen. Den gleichen Zweck verfolgt das vorliegende Werk des em. o. Prof. der technischen Mechanik an der technischen Hochschule München, das seinen Titel dem Kleinschen Werke bewußt nachgebildet hat und das gleichfalls fortgeschrittenen Studierenden eines Ingenieurfaches oder der technischen Physik oder den nach vertiefter Ausbildung strebenden fertigen Ingenieuren und Physikern die elementare Mechanik von einem höheren Standpunkt aus darzulegen versucht. Dieser höhere Standpunkt bringt es mit sich, daß zunächst in einem 1. Abschnitt die geschichtliche Entwicklung der Mechanik von *Archimedes* (287—212) bis zu *Newton* (1642—1726) dargelegt wird, wobei Kurzbiographien und Bilder der großen Meister der Mechanik (*Galilei, Kepler, Huygens, Guericke, Newton, Jacques Bernoulli, Euler* und *Mach*) gebracht werden und der jeweilige Stand der Mechanik bei der Besprechung der Leistungen dieser großen Meister geschildert wird. Der 2. Abschnitt ist gänzlich dem Aufbau der Newtonschen Mechanik gewidmet. Ein 3. und 4. Abschnitt behandelt die Differential- und Integralprinzipe der Mechanik. Der letzte 5. Abschnitt erörtert die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik, die auftreten, wenn die mechanischen Geschwindigkeiten mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar werden. Dagegen konnte sich der Verf. nicht dazu entschließen, auch die Abweichungen von der Newtonschen Mechanik darzustellen, die auftreten, wenn das Plancksche Wirkungsquantum nicht mehr gleich Null gesetzt werden kann, da er nach seinen eigenen Worten „hierfür bisher keine für das Buch passende Darstellung dieser neuesten Entwicklung der Mechanik hat finden können". Da aber im 4. Abschnitt das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung seinen Platz gefunden hat, hätte vielleicht das Hamiltonsche Prinzip der variierenden Wirkung mit der daran anschließenden

Hamilton-Jacobischen Integrationstheorie auch einen anschaulichen Zugang zu dieser neuesten Entwicklung eröffnen können. Möglicherweise hätte aber eine Darstellung dieser Gedankengänge den Rahmen des Buches gesprengt.

Wie bei einem Altmeister der Mechanik wie *Ludwig Föppl* nicht anders zu erwarten, ist die Darstellung aller in dem Buch gebrachten Gedankengänge außerordentlich klar und verständlich. Das Ziel des Verf., den nach harmonischer Ausbildung strebenden Technikern und Physikern die Möglichkeit zu geben, sich in der Mechanik gründlich weiterzubilden, ist in so hervorragender Weise erreicht, daß man diesem wahrhaft köstlichen Buche die weiteste Verbreitung wünschen möchte. *Th. Sexl*, Wien

The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow. Von *J. W. Miles*. (Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.) Mit 49 Textabb., XII, 220 S. Cambridge: At the University Press. 1959. 45/-net.

Die vorliegende Monographie gibt einen Überblick über die Resultate des Verf., welche er bei dem Problem der Anwendung der Potentialtheorie der idealen Flüssigkeiten zur Berechnung der aerodynamischen Kräfte auf Tragflächen und dünne Körper im nichtstationären Überschallgebiet erzielte. In den ersten vier Kapiteln werden zunächst die *Euler*schen Gleichungen linearisiert und auf geeignete Normalformen transformiert und soweit möglich explizite Lösungen der auftretenden Randwertprobleme mit Hilfe von Integraltransformationen gegeben. Tragflächenformen, für welche exakte Lösungen der linearisierten Gleichungen gefunden werden konnten, werden in den Kapiteln 5 bis 8 diskutiert. Allgemeinere Formen müssen mit Hilfe von Näherungsmethoden behandelt werden, was in den Kapiteln 9 bis 12 durchgeführt wird. Die Einschränkungen, welche durch die Linearisierung der Gleichungen bedingt sind, werden in einem letzten 13. Kapitel erörtert. Die vollständige Lösung eines Problems für eine nichtstationäre Strömung enthält natürlich als Spezialfall auch die Lösung des entsprechenden Problems für die stationäre Strömung wie sie sich größtenteils in der, in der gleichen Sammlung erschienenen, Monographie von *G. N. Ward* über die linearisierte Theorie der stationären Überschallströmungen finden. Am Schluß des Buches befindet sich ein Literaturverzeichnis mit ungefähr 300 Zitaten und eine Zusammenstellung der benützten Bezeichnungen. Das klar und anregend geschriebene Buch bildet für alle auf diesem Gebiet arbeitenden Spezialisten ein unentbehrliches Nachschlagewerk. Druck und Ausstattung des Werkes sind mustergiltig. *Th. Sexl*, Wien

Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle. Von *J.-L. Destouches*. (Les Grands Problèmes des Sciences: IX.) VII, 163 S. Paris: Gauthier-Villars. 1958. fr. 4000.—.

In der gleichen Serie wie die vorliegende erschien 1956 eine Monographie des gleichen Verf., in der er auf Arbeiten von *L. de Broglie* fußend eine funktionelle Theorie der Elementarteilchen entwickelte. In dieser Theorie werden einer punktförmigen Singularität, genannt Partikel, physikalische Wellen zugeordnet, also statt der Ψ-Funktion, die nur statistisch mit den Beobachtungsdaten zusammenhängt, objektive Elemente in der Wellenbeschreibung der Teilchen eingeführt. Dabei werden im Gegensatz zur früheren Auffassung nicht gequantelte Bewegungen nicht grundsätzlich ausgeschlossen, vielmehr gerade zur Beschreibung der Übergänge zu den gequantelten Bewegungen herangezogen. Der Grundgedanke dieser Theorie wurde in einem ersten Kapitel axiomatisch begründet und der Zusammenhang mit dem *de Broglie*schen Ansatz

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V\right) u + i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = Q(u, \nabla),$$

wo $Q(u, \nabla)$ die nichtlinearen Terme repräsentieren soll, erörtert. Dieses Kapitel wird in der vorliegenden Monographie gleichfalls im ersten Kapitel in konzentrierter Form wiederholt. Während aber in der ersten Monographie nur nichtrelativistische Probleme und Teilchen ohne Spin behandelt wurden, findet sich jetzt im Kap. 2 die relativistische Theorie von Teilchen mit Spin ½ (Paulisches Elektron), im Kap. 3 die Theorie des *Dirac*schen Elektrons auf Grund der neuen Gesichtspunkte. Kap. 4 behandelt Teilchen mit dem isotopen Spin ½ mit und ohne Spiegelungsunsymmetrie (handedness, chiralite), Kap. 5 Teilchen mit dem Spin 1 und das Photon. Eine ausführliche Darlegung der nichtlinearen Elektrodynamik mit einer Übersicht über die älteren Theorien von *Mie*, *Born* und *Infeld*, *de Broglie* folgen in einem 6. und die Theorie des Gravitons (Spin 2) und der Gravitation in einem 7. und 8. Kap. Das Hauptproblem aller Erörterungen ist die geeignete Bestimmung der nichtlinearen Terme $Q(u, \nabla)$. Dem Verf. scheint zumindest eine teilweise Bestimmung dieser Terme gelungen zu sein. Infolgedessen glaubt er sich zu der Hoffnung berechtigt, daß die funktionelle Theorie der Elementarteilchen eine geeignete Grundlage für eine Vereinigung der bisher getrennt nebeneinanderlaufenden Theorien der Elementarteilchen von *Broglie* und *Heisenberg* im mikroskopischen und der einheitlichen makroskopischen Feldtheorien von *Einstein* bilden werde. *Th. Sexl*, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Instationäre Wärmespannungen

Von

Heinz Parkus

o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien

Mit 34 Textabbildungen. V, 166 Seiten. Gr.-8°. 1959

Ganzleinen S 228.—, DM 38.—, sfr. 38.90, $ 9.05

Die „Instationären Wärmespannungen" bilden die Fortsetzung und gleichzeitig den Abschluß einer systematischen und umfassenden Darstellung der Theorie der Wärmespannungen, die mit dem Buch von *Melan* und *Parkus* „Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder" begonnen wurde. In diesem Buche werden die Wärmespannungen nichtstationärer Temperaturfelder unter Berücksichtigung sowohl der vollkommen elastischen als auch der viskoelastischen und der elastisch-plastischen Körper behandelt. Es sind damit die theoretischen Grundlagen von Vorgängen zusammengefaßt, die auf vielen Gebieten der Technik heute eine wichtige Rolle spielen, vor allem überall dort, wo Maschinen- oder Bauteile hohen Temperaturbeanspruchungen ausgesetzt sind, wie etwa im Reaktorbau, Flugzeugbau, Raketenbau usw.

Acta Physica Austriaca. Unter Mitwirkung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von **Fritz Regler**, Wien, und **Hans Thirring**, Graz. Schriftleitung: **Paul Urban**, Graz.

Zuletzt erschien:

Band 12, Heft 3. (Ausgegeben im März 1959) Mit 5 Abbildungen. 112 Seiten. 1959. S 156.—, DM 26.—, sfr. 26.60, $ 6.20

Inhaltsverzeichnis: **Urban, P.** *Wolfgang Pauli* †. — **Bodea, E.** Die Temperaturwaage, ein MKSA-Normthermometer. — **Krzywoblocki, M. Z. v.** and **R. E. Bloomquist.** On Heat Phenomena on Rotating Bodies in Free Molecule Flow. — **Gebauer, R.** und **A. Franz.** Anomalien bei der Bestimmung der spezifischen Elektronenladung mit Hilfe von Fadenstrahlen in Stickstoff. — **Rao, J. R.** Rigorous Solution of *Einstein*'s Unified Theory for a Special Type of Symmetry. — **Bukovics, E.** Lineare Eigenwertaufgaben in der Mechanik. — **Hanke, L.** und **P. Urban.** Zur *Green*'schen Funktion der DIRAC-Gleichung. — Buchbesprechungen.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit

Von

Rudolf Carnap

Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles

Bearbeitet von

Wolfgang Stegmüller

o. Professor an der Universität München

VIII, 261 Seiten. Gr.-8°. 1958

Ganzleinen S 192.—, DM 32.—, sfr. 32.80, $ 7.60

Das induktive Denken spielt in Wissenschaft und Alltag eine nicht geringere Rolle als das deduktive. Während aber die deduktive Logik als ein System von präzisen Regeln aufgebaut werden konnte, kamen die bisherigen Versuche, die Regeln des induktiven Schließens in exakter Weise zu formulieren, über gewisse erste Ansätze nicht hinaus. *Rudolf Carnap* hat es in seinem Werk „Logical Foundations of Probability" als erster unternommen, ein System der induktiven Logik aufzubauen, das seine Stelle neben den modernen Systemen der deduktiven Logik behaupten kann. Das vorliegende Buch stellt die in dem erwähnten Werk entwickelte Theorie *Carnaps* in gekürzter Form dar, wobei auch spätere und zum Teil noch nicht veröffentlichte Forschungsresultate mitberücksichtigt wurden.

Das Buch wendet sich sowohl an den Philosophen, der ein besseres Verständnis des Begriffes „Wahrscheinlichkeit" und des Grundes für die Gültigkeit von Wahrscheinlichkeitsschlüssen zu gewinnen sucht, als auch an den Logiker, der nach einem System der induktiven Logik Umschau hält, das nach ebenso exakten Prinzipien aufgebaut ist wie die symbolischen Systeme der deduktiven Logik. Aber auch der Naturwissenschaftler, der sich für die erfahrungswissenschaftliche Erkenntnis als hypothetisches Wissen interessiert, und der Mathematiker und Statistiker, dem es um eine Klärung von Wesen und Gültigkeit der statistischen Schlüsse geht, werden das Buch mit Nutzen zu Rate ziehen. Für das Studium des Buches ist keine vorherige Vertrautheit mit symbolischer Logik und Semantik erforderlich, da alle verwendeten Symbole und technischen Ausdrücke im Buch selbst erklärt werden.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung